Indication de barème sur 22 points

EXERCICE 1 — 5,5 pts

Soit la fonction f définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 16}{4 - x}$

Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Justifier que $\mathscr{C}$ admet une asymptote dont vous préciserez une équation.
3. **a.** Montrer que, pour tout réel $x \neq 4$, on a : $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 8x - 12}{(4 - x)^2}$

   b. Dresser le tableau de variation de f sur D_f en y indiquant les limites.
4. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ n'admet pas de tangente parallèle à la droite d'équation $y = -x$.

EXERCICE 2 — 3,75 pts

Déterminer les limites en "a" de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{5x}{\sin x + 4}$ en a= $-\infty$.
2. $g(x) = -x + 3 - 2\mathrm{e}^{-x}$ en a= $-\infty$.
3. $h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-5x}}{1 - \mathrm{e}^{x}}$ en a= 0^+.

EXERCICE 3 — 5 points

Dans cet exercice, les trois questions sont indépendantes.

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 2)\mathrm{e}^{-x}$
   Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

   a. Justifier que $\mathscr{C}$ admet une asymptote dont vous préciserez une équation.

   b. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point où cette courbe coupe l'axe des abscisses.
2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = \dfrac{x}{1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$
   Déterminer les limites de g à gauche et à droite de zéro.
3. Donner sans justifier l'expression d'une fonction rationnelle h dont la courbe admet pour asymptotes les droites d'équation $x = -5$, $x = 1$, et $y = -2$.

Tournez svp!

Exercice 4 **4 pts**

Dans un repère de l'espace, on considère les points :

$A(1;-2;-1)$, $B(1;4;1)$, $C(-2;4;3)$, $M(3;1;1)$, et $N(2;2;2)$.

1. Justifier que les points A, B et C définissent un plan.
2. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont coplanaires.
3. Le point N appartient-il au plan (ABC) ? Justifier votre réponse.
4. Que peut-on en déduire pour la droite (MN) ?

Exercice 5 **1,75 pts**

On considère un tétraèdre $ABCD$.
Les points R et S sont définis par : $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AS} = 3\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DB}$

Sans utiliser de coordonnées :

1. Justifier que $\overrightarrow{DR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$
2. Exprimer de même $\overrightarrow{DS}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, et $\overrightarrow{AD}$.
3. Que peut-on en déduire pour les points D, R, et S ?

Exercice 6 **2 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle $x \to \mathrm{e}^x$.
Pour tout point M d'abscisse a appartenant à $\mathscr{C}$, on considère le point P de coordonnées $(a\,;\,0)$ et le point N, point d'intersection de la tangente en M à $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

Montrer que la distance PN est constante.