

Corrigé DS n° 2

EXERCICE 1

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2025(-2)(1-2x)^{2024} = -4050(1-2x)^{2024}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 5(x^4 + 2)^{-5} \quad \text{d'où} \quad g'(x) = 5(-5)(4x^3)(x^4 + 2)^{-6} = \frac{-100x^3}{(x^4 + 2)^6}$$

EXERCICE 2

PARTIE I

1. **Faux** car $f(x) > 0$ sur $[2; 6]$, donc si $g' = f$, g est strict. croissante sur $[2; 6]$.
2. **Vrai** car f , donc g' , est décroissante sur $[2; 6]$, donc g est concave sur $[2; 6]$.
3. **Faux** car f est strict. décroissante sur $[2; 6]$.
4. **Vrai** car si $g' = f$, alors $g'' = f'$, et $f'(x)$ (donc $g''(x)$) s'annule en changeant de signe en $\frac{1}{e}$. Donc la courbe de g admet un point d'inflexion..

PARTIE II

1.
 - La droite $\mathcal{T}_A$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\frac{1}{e}; e\right)$; elle a donc comme coefficient directeur $f'\left(\frac{1}{e}\right)$.
La droite $\mathcal{T}_A$ est parallèle à l'axe des abscisses donc son coefficient directeur est nul.
On peut donc déduire que $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$.
 - La droite $\mathcal{T}_B$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B de coordonnées $(1; 2)$, donc elle a pour coefficient directeur $f'(1)$.
La droite $\mathcal{T}_B$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3; 0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; 3)$, donc on peut en déduire que son coefficient directeur est $\frac{3-0}{0-3} = -1$.
On a donc $f'(1) = -1$.
2. La droite $\mathcal{T}_B$ a pour coefficient directeur -1 et 3 pour ordonnée à l'origine, donc elle a pour équation : $y = -x + 3$.

EXERCICE 3

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
 $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (1)(e^{-x^2}) + (x)(-2xe^{-x^2}) = (1-2x^2)(e^{-x^2})$

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) &= (-4x)(e^{-x^2}) + (1-2x^2)(-2xe^{-x^2}) \\ &= (-6x + 4x^3)(e^{-x^2}) \\ &= 2x(2x^2 - 3)(e^{-x^2}) \end{aligned}$$

2. On dresse le tableau de signe de $f''(x)$:

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$+\infty$		
$2x$	$-$	$-$	0	$+$	$+$		
$2x^2-3$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	
e^{-x^2}	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$		
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

- f est convexe sur $\left[-\sqrt{\frac{3}{2}}; 0\right]$ et sur $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}; +\infty\right]$
- f est concave sur $\left]-\infty; -\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ et sur $\left[0; \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$

Sa courbe admet trois points d'inflexion d'abscisses $-\sqrt{\frac{3}{2}}$, 0 , et $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

EXERCICE 4

- $\mathcal{C}_1$ ne peut pas être la courbe de f , car f' serait alors négative, puis positive et enfin négative, et aucune des deux autres courbes ne correspond à ces signes.
 $\mathcal{C}_1$ ne peut pas être la courbe de f' , car sa dérivée f'' serait de même négative, puis positive et enfin négative, et aucune des deux autres courbes ne correspond à ces signes.
Donc $\mathcal{C}_1$ est la courbe de f'' .
- $\mathcal{C}_2$ ne peut pas être la courbe de f , car sa dérivée serait négative puis positive, et cela ne correspond pas à la fonction représentée par la courbe $\mathcal{C}_3$. Donc $\mathcal{C}_3$ est la courbe de f .
Et enfin $\mathcal{C}_2$ est la courbe de f' .

EXERCICE 5

1. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de la forme $\sqrt{u}$ avec u dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+8}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$$

$$f'(1) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad f(1) = 3.$$

$$\text{Equation réduite de } T_1 : y = \frac{1}{3}(x-1) + 3 = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3} = \frac{x+8}{3}$$

- (b) f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient, défini sur $\mathbb{R}$, de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) &= \frac{(1)(\sqrt{x^2+8}) - \frac{x}{\sqrt{x^2+8}}(x)}{\sqrt{x^2+8}^2} \\ &= \frac{\left(\sqrt{x^2+8}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+8}^3} \\ &= \frac{x^2+8 - x^2}{\sqrt{x^2+8}^3} \\ &= \frac{8}{\sqrt{x^2+8}^3} \\ &= \frac{8}{(x^2+8)\sqrt{x^2+8}} \end{aligned}$$

- (c) f est convexe sur $\mathbb{R}$ car $f''(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Donc sa courbe est au-dessus de toute ses tangentes, donc de T_1 .

On a donc, pour tout réel x : $\sqrt{x^2+8} \geq \frac{x+8}{3}$.

2. Soit a un réel. Equation réduite de T_a : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$$\begin{aligned} O \in T_a &\iff 0 = f'(a)(0-a) + f(a) \iff 0 = -af'(a) + f(a) \\ &\iff -a \frac{a}{\sqrt{a^2+8}} + \sqrt{a^2+8} = 0 \\ &\iff \frac{-a^2 + \sqrt{a^2+8}^2}{\sqrt{a^2+8}} = 0 \\ &\iff \frac{8}{\sqrt{a^2+8}} = 0 \end{aligned}$$

Cette équation n'a pas de solution (car $8 \neq 0$), donc il n'existe aucune tangente à $\mathcal{C}_f$ passant par l'origine du repère.