

Corrigé DS n° 1

EXERCICE 1 3 pts

1. On cherche a et b tel que $f(1) = -4$ et $f'(1) = 0$ 1,25 pts

- $f(1) = a + b - 3 = -4$

- f est dérivable sur D en tant que fonction rationnelle définie sur D et

$$\forall x \in D, f'(x) = a - 9 \times \frac{-1}{(x+2)^2} = a + \frac{9}{(x+2)^2}$$

d'où $f'(1) = a + 1$

- $\begin{cases} f(1) = -4 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b - 3 = -4 \\ a + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ a + b = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$

- bilan : $\forall x \in D, f(x) = -x - \frac{9}{x+2}$

2. $\forall x \in D, f'(x) = a + \frac{9}{(x+2)^2} = -1 + \frac{9}{(x+2)^2} = \frac{-(x+2)^2 + 9}{(x+2)^2} = \frac{-x^2 - 4x + 5}{(x+2)^2}$ 0,75 pt

3. 1 pt

x	$-\infty$	-5	-2	1	$+\infty$	
$-x^2-4x+5$	$-$	$\emptyset$	$+$	$+$	$\emptyset$	$-$
$(x+2)^2$	$+$	$+$	0	$+$	$\emptyset$	$+$
$f'(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$	$+$	$\emptyset$	$-$
$f(x)$						

EXERCICE 2 3 pts

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - 5 = \frac{5n-2}{n+2} - 5 = \frac{-12}{n+2} < 0$

Donc on a bien $u_n < 5$ pour tout entier n . 1 pt

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - (-1) = \frac{5n-2}{n+2} + 1 = \frac{6n}{n+2} \geq 0$$

Donc on a bien $u_n \geq -1$ pour tout entier n . 1 pt

Bilan : pour tout entier n , on a : $u_n \in [-1; 5[$

2. Etude du sens de variation de la suite :

1 pt

— **Méthode 1** : étude du signe de $u_{n+1} - u_n$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n &= \frac{5(n+1)-2}{n+3} - \frac{5n-2}{n+2} \\ &= \frac{(5n+3)(n+2) - (5n-2)(n+3)}{(n+2)(n+3)} = \dots = \frac{12}{(n+3)(n+2)} > 0 \end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

— **Méthode 2** : étude des variations sur $I = [0; +\infty[$ de la fonction f telle que $u_n = f(n)$

On a $f(x) = \frac{5x-2}{x+2}$

$$\forall x \in I, f'(x) = \frac{5(x+2) - (1)(5x-2)}{(x+2)^2} = \frac{12}{(x+2)^2} > 0$$

f est strict. croissante sur I , donc la suite (u_n) est strict. croissante.

EXERCICE 3 3,75 pts

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{2n + \sqrt{n}}{1 - 3\sqrt{n}} = \frac{n \left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)}{\sqrt{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 3 \right)} = \sqrt{n} \times \frac{2 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}} - 3}$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n}) = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 2$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 3 \right) = -3$

d'où (par produit et quotient) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = -\infty$ 1,25 pts

- $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq (-1)^n \leq 1$

d'où, pour tout entier n : $v_n \leq 1 - 2025n$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - 2025n) = -\infty$

d'où (par comparaison) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = -\infty$ 1,25 pts

- $w_n = \frac{3^n - 4^n}{e^n + 1} = \frac{4^n \left(\frac{3^n}{4^n} - 1 \right)}{e^n \left(1 + \frac{1}{e^n} \right)} = \left(\frac{4}{e} \right)^n \frac{\left(\left(\frac{3}{4} \right)^n - 1 \right)}{\left(1 + \frac{1}{e^n} \right)}$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n = 0$ car $-1 < \frac{3}{4} < 1$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{3}{4} \right)^n - 1 \right) = -1$

de plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^n}\right) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{e}\right)^n = +\infty$ car $\frac{4}{e} > 1$

Bilan (par produit et quotient) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$

1,25 pts

EXERCICE 4 4,25 pts

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad u_0 = 5.$$

$$1. \quad u_1 = \frac{1}{3}u_0 + \frac{4}{3} = 3 \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{1}{3}u_1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{3}{5} \quad \text{et} \quad \frac{u_2}{u_1} = \frac{7}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1} \quad \text{donc} \quad (u_n) \text{ n'est pas géométrique.}$$

0,5 pt

$$2. \text{ Soit } v_n = u_n - 2$$

$$(a) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} - 2 = \frac{1}{3}u_n - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(u_n - 2) = \frac{1}{3}v_n$$

Donc la suite v est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$

1 pt

$$(b) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^{n-1}}$$

$$\text{D'où, } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n + 2 = 2 + \frac{1}{3^{n-1}}$$

1 pt

$$(c) \quad (v_n) \text{ tend vers } 0 \text{ car } -1 < \frac{1}{3} < 1. \text{ Donc } (u_n) \text{ tend vers } 2.$$

0,5 pt

$$(d) \quad \sum_{k=0}^{20} v_k = v_0 \times \frac{1 - q^{21}}{1 - q} = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{21}}{\frac{2}{3}} = 9 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{21}}{2}$$

0,75 pt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{20} u_k &= \sum_{k=0}^{20} (v_k + 2) = \left(\sum_{k=0}^{20} v_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{20} 2\right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{20} v_k\right) + 21 \times 2 = 42 + 9 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{21}}{2} \end{aligned}$$

0,5 pt

EXERCICE 5 4,5 pts

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(v_n) est définie pour tout entier naturel n , par : $v_n = u_n - 3$.

$$1. \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2} - 3 = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{9}{2}$$

$$\text{Or } v_n^2 = (u_n - 3)^2 = u_n^2 - 6u_n + 9$$

$$\text{donc } -\frac{1}{2}v_n^2 = -\frac{1}{2}(u_n^2 - 6u_n + 9) = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{9}{2} = v_{n+1}$$

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.

1 pt

$$2. \text{ Soit } \mathcal{P}(n) \text{ la proposition : } -1 \leq v_n \leq 0$$

2 pts

- *Initialisation* : $v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$

Et on a bien $-1 \leq -1 \leq 0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- *Hérédité* : on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier n donné.

Hyp. de récurrence :

$$\text{d'où } -1 \leq v_n \leq 0$$

$$\text{d'où } 1 \geq v_n^2 \geq 0 \quad \text{car } x \mapsto x^2 \text{ décroissante sur }]-\infty; 0]$$

$$\text{d'où } -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}v_n^2 \leq 0$$

$$\text{d'où } -1 \leq -\frac{1}{2}v_n^2 \leq v_{n+1} \leq 0$$

On a ainsi montré que : $\mathcal{P}(n) \text{ vraie} \implies \mathcal{P}(n+1) \text{ vraie}$

- *Bilan* : La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire; on peut donc conclure, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier naturel n , on a : $-1 \leq v_n \leq 0$.

$$3. \quad (a) \quad \text{Pour tout entier naturel } n : v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2}v_n^2 - v_n = -v_n \left(\frac{1}{2}v_n + 1\right) \quad 0,5 \text{ pt}$$

$$(b) \quad \text{Pour tout } n, v_n \leq 0 \text{ donc } -v_n \geq 0.$$

$$\text{Pour tout } n, -1 \leq v_n \leq 0 \text{ donc } -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}v_n \leq 0 \text{ et donc } \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}v_n + 1 \leq 1; \text{ donc}$$

$$\frac{1}{2}v_n + 1 > 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} -v_n \geq 0 \\ \frac{1}{2}v_n + 1 > 0 \end{array} \right\} \implies -v_n \left(\frac{1}{2}v_n + 1\right) \geq 0 \iff v_{n+1} - v_n \geq 0$$

Pour tout n , $v_{n+1} - v_n \geq 0$, donc la suite (v_n) est croissante.

1 pt

EXERCICE 6 2 pts

Soit $P(n)$ la proposition : $t_n = \frac{n}{n+1}$

- $P(0)$ est vraie car on a bien : $\frac{0}{0+1} = 0 = t_0$
- Supposons que $t_n = \frac{n}{n+1}$ pour **un** entier n donné quelconque.

$$\text{d'où : } t_{n+1} = t_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\text{d'où : } t_{n+1} = \frac{n(n+2) + 1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\text{d'où : } t_{n+1} = \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\text{d'où : } t_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

Ainsi on a montré que : $P(n)$ vraie $\Rightarrow P(n+1)$ vraie

- Bilan : on a montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = \frac{n}{n+1}$

EXERCICE 7 2 pts

1. Une suite (u_n) diverge vers $+\infty$ lorsque, pour tout réel A , il existe un rang N à partir duquel $u_n \in [A; +\infty[$.
2. Soit (u_n) une suite croissante non majorée.

Soit A un réel.

objectif : trouver un rang N à partir duquel $u_n \geq A$.

Comme la suite (u_n) n'est pas majorée, il existe au moins un de ses termes qui est supérieur ou égal à A . Donc il existe un entier N tel que $u_N \geq A$

Or la suite est croissante, donc pour tout $n \geq N$, on a $u_n \geq u_N$

Or $u_N \geq A$, donc pour tout $n \geq N$, on a $u_n \geq A$

Ainsi on a montré que (u_n) diverge vers $+\infty$.