

Corrigé DM n° 1

EXERCICE 1

1. On cherche a et b tel que $\boxed{f(-2) = -3}$ et $\boxed{f'(-2) = 0}$

- $f(-2) = \frac{4-2a+b}{-1} = -4+2a-b$

- f est dérivable sur D en tant que fonction rationnelle définie sur D et

$$\forall x \in D, \quad f'(x) = \frac{(2x+a)(x+1) - (1)(x^2+ax+b)}{(x+1)^2} = \dots$$

$$= \frac{x^2+2x+a-b}{(x+1)^2}$$

d'où $f'(-2) = a-b$

- $\begin{cases} f(-2) = -3 \\ f'(-2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -4+2a-b = -3 \\ a-b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a-b = 1 \\ a = b \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} 2a-a = 1 \\ a = b \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

- bilan : $\forall x \in D, \quad \boxed{f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}}$

2. $\forall x \in D, \quad x + \frac{1}{x+1} = \frac{(x)(x+1)+1}{x+1} = \frac{x^2+x+1}{x+1} = f(x)$

3. $\forall x \in D, \quad \boxed{f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}}$

→ Voir expression de $f'(x)$ obtenue au 1. en remplaçant a et b par leur valeur

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$		
x^2+2x		$+$	0	$-$	0	$+$	
$(x+1)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$				-3			1

EXERCICE 2

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - (x+1) = \frac{1}{4}x^2 + 2 - x - 1 = \frac{1}{4}x^2 - x + 1$

Etudions le signe de ce trinôme : $\Delta = 1 - 4 \times \frac{1}{4} \times 1 = 0$

Il admet une racine double et le coef. de x^2 est positif

d'où $f(x) - (x+1) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $f(x) \geq x+1$ sur $\mathbb{R}$

2. a. Voir courbe et constructions sur autre page

b. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq x+1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(u_n) \geq u_n+1$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq u_n+1$

c. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \geq 1 > 0$ donc la suite u est croissante.

d. Soit $P(n)$ la proposition : $u_n \geq u_0 + n$

- $P(0)$ est vraie car : $u_0 \geq u_0 + 0$

- Supposons que $u_n \geq u_0 + n$ pour un entier n donné.

On a : $u_{n+1} \geq u_n + 1$ (d'après 2. b.)

donc : $u_{n+1} \geq (u_0 + n) + 1$ d'après l'hypothèse de réc.

donc : $u_{n+1} \geq u_0 + n + 1$

Ainsi on a montré que : $P(n) \text{ vraie} \rightarrow P(n+1) \text{ vraie}$

- Bilan : on en déduit, d'après le principe de récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq u_0 + n$$

e. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq u_0 + n$

Or $\lim(u_0 + n) = +\infty$ donc par comparaison $\lim u_n = +\infty$.

EXERCICE 3

1. $u_n = 5 - n$ majorée par 5, mais non minorée car $\lim u_n = -\infty$.

3. $u_n = (-2)^n$

2. $u_n = (-2)^n$

4. $u_n = -3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$