⟶ mini aide en ligne sur www.mathamia.fr

EXERCICE 1 Détermination de paramètres et étude d'une fonction rationnelle

Soit la fonction rationnelle f définie sur $D = \mathbb{R}_{\setminus\{-1\}}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x+1}$ où a et b sont des réels.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. Déterminer a et b tels que la courbe $\mathscr{C}$ admette une tangente horizontale au point A de coordonnées $(-2; -3)$.
2. Montrer que, pour tout $x \in D$, on a : $f(x) = x + \dfrac{1}{x+1}$.
3. Déterminer la dérivée de f, puis dresser le tableau de variation de f sur D.
4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

EXERCICE 2 Suite définie par une formule de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + 2$

1. Montrer que pour tout réel x, $f(x) \geq x + 1$.
2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.
   - **a.** Construire la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormal (unité graphique : 0,5 cm) puis représenter sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite u sans les calculer.
   - **b.** Conjecturer graphiquement le sens de variation et la limite de la suite u.
   - **c.** Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n + 1$
   - **d.** En déduire le sens de variation de la suite u.
   - **e.** Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_0 + n$
   - **f.** En déduire le comportement de la suite u à l'infini.

EXERCICE 3 Un peu d'imagination !

Donner dans chaque cas, un exemple de suite (u_n) vérifiant les conditions données :

1. (u_n) est majorée et non minorée.
2. (u_n) n'est ni majorée ni minorée.
3. (u_n) est une suite géométrique non monotone.
4. (u_n) est une suite géométrique croissante de raison q avec $q \in]0;1[$