EXERCICE 1 **Corrigé Interro n° 1**

$U_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 1 - \frac{1}{(1+U_n)^2}$

Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < U_n < \frac{3}{4}$

Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété $0 < U_n < \frac{3}{4}$.

- **Initialisation**

  $U_0 = \frac{1}{2}$, donc $0 < U_0 < \frac{3}{4}$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

- **Hérédité**

  On suppose la propriété vraie pour un entier n donné.

  c'est-à-dire que : $0 < U_n < \frac{3}{4}$.

  D'où : $1 < 1 + U_n < \frac{7}{4}$

  $1 < (1+U_n)^2 < \frac{49}{16}$ (fonction carré strict. $\nearrow$ sur $[0;+\infty[$)

  $1 > \frac{1}{(1+U_n)^2} > \frac{16}{49}$ (fonction inverse strict. $\searrow$ sur $]0;+\infty[$)

  $-1 < -\frac{1}{(1+U_n)^2} < -\frac{16}{49}$

  $0 < 1 - \frac{1}{(1+U_n)^2} < 1 - \frac{16}{49}$

  $0 < U_{n+1} < \frac{33}{49}$

  Or $\frac{33}{49} < \frac{3}{4}$ d'où $0 < U_{n+1} < \frac{3}{4}$

  On a donc montré que si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout n, on a : $0 < U_n < \frac{3}{4}$.

EXERCICE 2

Soit une suite (v_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{5v_n - 4}{2v_n - 1}$

On considère la proposition $P(n)$: $\boxed{v_n = \frac{2 \times 3^n - 1}{3^n - 1}}$

Montrer que $P(n)$ est héréditaire.

On suppose la propriété vraie pour un entier n donné (non nul car on remarque que $P(0)$ n'est pas définie).

Hyp de réc.: $v_n = \frac{2 \times 3^n - 1}{3^n - 1}$.

D'où :
$$v_{n+1} = \frac{5 \times \frac{2 \times 3^n - 1}{3^n - 1} - 4}{2 \times \frac{2 \times 3^n - 1}{3^n - 1} - 1}$$
$$= \frac{5(2 \times 3^n - 1) - 4(3^n - 1)}{2(2 \times 3^n - 1) - (3^n - 1)}$$
$$= \frac{10 \times 3^n - 5 - 4 \times 3^n + 4}{4 \times 3^n - 2 - 3^n + 1}$$
$$= \frac{6 \times 3^n - 1}{3 \times 3^n - 1}$$
$$= \frac{2 \times 3 \times 3^n - 1}{3 \times 3^n - 1}$$
$$= \frac{2 \times 3^{n+1} - 1}{3^{n+1} - 1}$$

On a donc montré que si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi, donc que $P(n)$ est héréditaire.