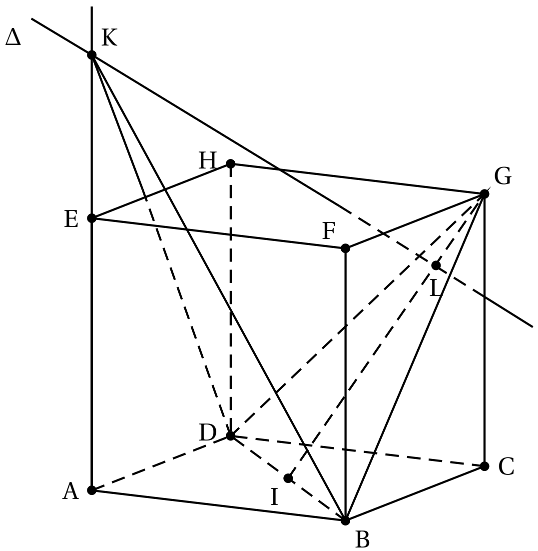
# Corrigé DS n° 6

**EXERCICE 1** ........................................................................ 15 pts

On considère un cube ABCDEFGH de côté 1.




Le point I est le milieu du segment [BD]. On définit le point L tel que $\overrightarrow{\text{IL}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\text{IG}}$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

1. (a) D $(0\,;1\,;0)$, B $(1\,;0\,;0)$, I $\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\,;0\right)$ et G $(1\,;1\,;1)$ 1 pt

(b) • $\overrightarrow{\text{IL}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_\text{L} - x_\text{I} \\ y_\text{L} - y_\text{I} \\ z_\text{L} - z_\text{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\text{L} - \frac{1}{2} \\ y_\text{L} - \frac{1}{2} \\ z_\text{L} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\text{L} - \frac{1}{2} \\ y_\text{L} - \frac{1}{2} \\ z_\text{L} \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{\text{IG}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_\text{G} - x_\text{I} \\ y_\text{G} - y_\text{I} \\ z_\text{G} - z_\text{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{1}{2} \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\text{IL}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\text{IG}} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_\text{L} - \frac{1}{2} & = & \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \\ & = & \\ y_\text{L} - \frac{1}{2} & = & \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \\ & = & \\ z_\text{L} & = & \frac{3}{4} \times 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_\text{L} & = & \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \\ & = & \\ y_\text{L} & = & \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \\ & = & \\ z_\text{L} & = & \frac{3}{4} \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_\text{L} & = & \frac{7}{8} \\ & = & \\ y_\text{L} & = & \frac{7}{8} \\ & = & \\ z_\text{L} & = & \frac{3}{4} \end{array}\right.$$ 1 pt

2. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $x + y - z - 1 = 0$.

   - $x_\text{B} + y_\text{B} - z_\text{B} - 1 = 1 + 0 - 0 - 1 = 0$ donc B $\in \mathscr{P}$.
   - $x_\text{D} + y_\text{D} - z_\text{D} - 1 = 0 + 1 - 0 - 1 = 0$ donc D $\in \mathscr{P}$.
   - $x_\text{G} + y_\text{G} - z_\text{G} - 1 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$ donc G $\in \mathscr{P}$.

   Donc le plan (BDG) a pour équation cartésienne $x + y - z - 1 = 0$. 1 pt

3. On considère la droite Δ perpendiculaire au plan (BDG) passant par L.

   (a) (BDG) a pour équation $x + y - z - 1 = 0$, donc il a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

   La droite Δ est perpendiculaire au plan (BDG) donc elle a le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur directeur. Donc la droite Δ est l'ensemble des points M $(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que $\overrightarrow{\text{LM}} = t\,\vec{n}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

$$\overrightarrow{\text{LM}} = t\,\vec{n} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x - \frac{7}{8} & = & t \times 1 \\ & = & \\ y - \frac{7}{8} & = & t \times 1 \\ & = & \\ z - \frac{3}{4} & = & t \times (-1) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{7}{8} + t \\ & = & \\ y & = & \frac{7}{8} + t \\ & = & \\ z & = & \frac{3}{4} - t \end{array}\right. \text{ où } t \in \mathbb{R}$$ 1,5 pt

   (b) Soit K le point de coordonnées $\left(0\,;\,0\,;\,\dfrac{13}{8}\right)$.

   - On regarde si les coordonnées de K vérifient la représentation paramétrique de Δ, autrement dit on cherche s'il existe un réel $t$ tel que ;

$$\begin{cases} 0 &= \dfrac{7}{8}+t \\ & = \\ 0 &= \dfrac{7}{8}+t \\ & = \\ \dfrac{13}{8} &= \dfrac{3}{4}-t \end{cases}$$

Le réel $t = -\dfrac{7}{8}$ convient donc $\mathrm{K} \in \Delta$.

- $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AK}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\0\\\dfrac{13}{8}\end{pmatrix}$.

  Donc les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AK}}$ sont colinéaires donc $\mathrm{K} \in (\mathrm{AE})$.

Les deux droites $\Delta$ et (AE) sont donc sécantes en K. 1,5 pt

(c)
- $\overrightarrow{\mathrm{IL}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{IG}}$ donc $\mathrm{L} \in (\mathrm{IG})$ donc $\mathrm{L} \in (\mathrm{BDG})$.
- La droite $\Delta$ est perpendiculaire au plan (BDG).
- $\mathrm{K} \in (\mathrm{BDG})$

Donc le point L est le projeté orthogonal du point K sur le plan (BDG). 1 pt

4. (a) K a pour coordonnées $\left(0\,;\,0\,;\,\dfrac{13}{8}\right)$ et L a pour coordonnées $\left(\dfrac{7}{8}\,;\,\dfrac{7}{8}\,;\,\dfrac{3}{4}\right)$. Donc

$\mathrm{KL}^2 = \left(\dfrac{7}{8}-0\right)^2+\left(\dfrac{7}{8}-0\right)^2+\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{13}{8}\right)^2 = \left(\dfrac{7}{8}\right)^2+\left(\dfrac{7}{8}\right)^2+\left(-\dfrac{7}{8}\right)^2 = \dfrac{147}{64}$

donc $\mathrm{KL} = \dfrac{\sqrt{147}}{8} = \dfrac{7\sqrt{3}}{8}$ 1 pt

(b) On admet que le triangle DBG est équilatéral, donc chaque angle mesure $\dfrac{\pi}{3}$.

Le point I est le milieu de [BD] donc I est aussi le pied de la hauteur issue de G dans le triangle DBG.

Dans le triangle GIB rectangle en I, on a : $\sin\left(\widehat{\mathrm{IBG}}\right) = \dfrac{\mathrm{IG}}{\mathrm{BG}}$.

BG est la diagonale du carré BCGF de côté 1, donc $\mathrm{BG} = \sqrt{2}$. De même $\mathrm{BD} = \sqrt{2}$.

On a donc $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\mathrm{IG}}{\mathrm{BG}}$, donc $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\mathrm{IG}}{\sqrt{2}}$ et donc $\mathrm{IG} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

L'aire du triangle BDG vaut : $\dfrac{\mathrm{BD}\times\mathrm{IG}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 2 pts

(c) Le tétraèdre KDBG a pour base le triangle BDG et pour hauteur KL, donc son volume vaut : $\dfrac{1}{3}\times\text{aire(BDG)}\times\mathrm{KL} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{7\sqrt{3}}{8} = \dfrac{7}{16}$ 0.5 pt

5. On désigne par $a$ un réel appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et on note $\mathrm{K}_a$ le point de coordonnées $(0\,;\,0\,;\,a)$.

(a) On exprime le volume $\mathcal{V}_a$ de la pyramide $\mathrm{ABCDK}_a$ en fonction de $a$.

- La base de la pyramide est le carré ABCD d'aire 1.
- Le point $\mathrm{K}_a$ a pour coordonnées $(0\,;\,0\,;\,a)$ donc il appartient à la droite (AE) et donc $\mathrm{AK}_a$ est la hauteur de la pyramide $\mathrm{ABCDK}_a$.
- De façon évidente, $\mathrm{AK}_a = a$.

Donc $\mathcal{V}_a = \dfrac{1}{3}\times a\times 1 = \dfrac{a}{3}$. 1 pt

(b) On note $\Delta_a$ la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t' \\ y = t' \\ z = -t'+a \end{cases}$ où $t' \in \mathbb{R}$.

On appelle $\mathrm{L}_a$ le point d'intersection de la droite $\Delta_a$ avec le plan (BDG).

Les coordonnées de $\mathrm{L}_a$ vérifient le système $\begin{cases} x &= t' \\ y &= t' \\ z &= -t'+a \\ x+y-z-1 &= 0 \end{cases}$

On a donc $t'+t'-(-t'+a)-1=0$ soit $3t' = a+1$ donc $t' = \dfrac{a+1}{3}$.

$x = t' = \dfrac{a+1}{3}$ ; $y = t' = \dfrac{a+1}{3}$ et $z = -t'+a = -\dfrac{a+1}{3}+a = \dfrac{-a-1+3a}{3} = \dfrac{2a-1}{3}$

Donc les coordonnées du point $\mathrm{L}_a$ sont $\left(\dfrac{a+1}{3}\,;\,\dfrac{a+1}{3}\,;\,\dfrac{2a-1}{3}\right)$. 2 pts

(c) On cherche le volume du tétraèdre $\mathrm{GDBK}_a$.

- $\mathrm{K}_a\mathrm{L}_a{}^2 = \left(\dfrac{a+1}{3}-0\right)^2+\left(\dfrac{a+1}{3}-0\right)^2+\left(\dfrac{2a-1}{3}-a\right)^2$

  $= \left(\dfrac{a+1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{a+1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{-a-1}{3}\right)^2 = 3\times\dfrac{(a+1)^2}{9} = \dfrac{(a+1)^2}{3}$

  Donc $\mathrm{K}_a\mathrm{L}_a = \dfrac{a+1}{\sqrt{3}}$.

- Le volume du tétraèdre $\mathrm{GDBK}_a$ est :

  $\dfrac{1}{3}\times\mathrm{K}_a\mathrm{L}_a\times\text{aire(GBD)} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{a+1}{\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a+1}{6}$

Le tétraèdre $\mathrm{GDBK}_a$ et la pyramide $\mathrm{ABCDK}_a$ sont de même volume si et seulement si $\dfrac{a+1}{6} = \dfrac{a}{3}$, soit $\dfrac{a+1}{6} = \dfrac{2a}{3}$, soit $a+1 = 2a$, et donc si $a = 1$.

1,5 pts

**EXERCICE 2** ........................................................................ $\boxed{\text{5 pts}}$

Soit $(d_1)$ la droite passant par A$(1\,;\,2\,;\,-1)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $(d_2)$ la droite dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ y &=& 1+t\\ z &=& 2+t\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

1. $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $(d_2)$.

   $\dfrac{0}{1} \neq \dfrac{1}{2}$ donc $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires, donc $(d_1)$ et $(d_2)$ non parallèles.
   $\boxed{\text{1 pt}}$

   Une représentation paramétrique de $(d_1)$ est : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+k\\ y &=& 2+2k\\ z &=& -1\end{array}\right.$, $k \in \mathbb{R}$.

   Les deux droites sont sécantes si elles admettent un point d'intersection, autrement dit s'il existe un réel $t$ et un réel $k$ tels que

   $\left\{\begin{array}{rcl} 0 &=& 1+k\\ 1+t &=& 2+2k\\ 2+t &=& -1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} k &=& -1\\ k &=& -2\\ t &=& -3\end{array}\right.$ Il n'y a donc pas de solution.

   Les droites $(d_1)$ et $(d_2)$ ne sont pas sécantes. $\boxed{\text{1,5 pts}}$

   *Les deux droites n'étant ni parallèles ni sécantes, elles sont non coplanaires.*

2. Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A et dirigé par les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$. Déterminons une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

   On cherche les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ normal au plan $\mathcal{P}$.

   Il suffit d'avoir $\left\{\begin{array}{rcl} \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u_1} &=& 0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{w} &=& 0\end{array}\right.$ soit $\left\{\begin{array}{rcl} a+2b &=& 0\\ 2a-b+c &=& 0\end{array}\right.$

   Prenons par exemple $b = 1$.

   On a alors $\left\{\begin{array}{rcl} a &=& -2\\ c &=& 5\end{array}\right.$

   Donc $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$.

   $A \in \mathcal{P}$, donc une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est : $-2(x-1)+1(y-2)+5(z+1) = 0$.

   équation cartésienne de $\mathcal{P}$ : $-2x + y + 5z + 5 = 0$ $\boxed{\text{2,5 pts}}$