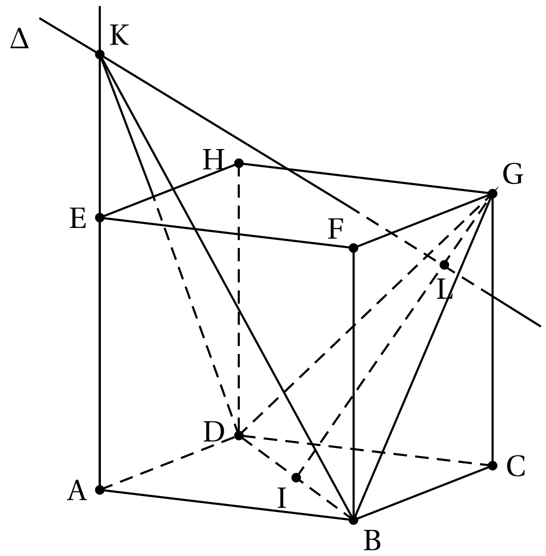
EXERCICE 1 **15 points**

On considère un cube ABCDEFGH de côté 1.



Le point I est le milieu du segment [BD]. On définit le point L tel que $\overrightarrow{IL} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{IG}$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. **a.** Préciser sans justifier les coordonnées des points D, B, I et G.

b. Montrer que le point L a pour coordonnées $\left(\dfrac{7}{8}\,;\,\dfrac{7}{8}\,;\,\dfrac{3}{4}\right)$.

2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BDG) est $x + y - z - 1 = 0$.

3. On considère la droite Δ perpendiculaire au plan (BDG) passant par L.

a. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

b. Montrer que les droites Δ et (AE) sont sécantes au point K de coordonnées $\left(0\,;\,0\,;\,\dfrac{13}{8}\right)$.

c. Que représente le point L pour le point K? Justifier la réponse.

4. **a.** Calculer la distance KL.

b. On admet que le triangle DBG est équilatéral. Montrer que son aire est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

c. En déduire le volume du tétraèdre KDBG. $\longrightarrow$ *rappel formule* : $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$

5. On désigne par a un réel appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et on note K_a le point de coordonnées $(0\,;\,0\,;\,a)$.

a. Exprimer le volume $\mathcal{V}_a$ de la pyramide ABCDK_a en fonction de a.

b. On note Δ_a la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t' \\ y = t' \\ z = -t' + a \end{cases}$ où $t' \in \mathbb{R}$

On appelle L_a le point d'intersection de la droite Δ_a avec le plan (BDG).

Montrer que les coordonnées du point L_a sont $\left(\dfrac{a+1}{3}\,;\,\dfrac{a+1}{3}\,;\,\dfrac{2a-1}{3}\right)$.

c. Déterminer, s'il existe, un réel strictement positif a tel que le tétraèdre GDBK_a et la pyramide ABCDK_a sont de même volume.

Tournez svp!

EXERCICE 2 **5 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Soit (d_1) la droite passant par $A(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et (d_2) la droite dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ y &=& 1+t\\ z &=& 2+t\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires.

2. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par A et dirigé par les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

   Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.