Exercice 1 - QCS **4 pts**

Les questions sont indépendantes, une seule des quatre réponses proposés est exacte.
Une réponse incorrecte ne rapporte ni n'enlève de point. Aucune justification n'est demandé.

1. On considère la fonction f définie pour tout rél x par $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$.
   Sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x)=2025$

   a. n'admet aucune solution. **b.** admet exactement une solution.
   c. admet exactement deux solutions. **d.** admet une infinité de solutions.

2. La fonction $x \longmapsto \ln\left(-x^2-x+6\right)$ est définie sur :

   a. $]-3\,;\,2[$ **b.** $]-\infty\,;\,6]$
   c. $]0\,;\,+\infty[$ **d.** $]2\,;\,+\infty[$

3. On considère la fonction f définie sur $]0,5\,;\,+\infty[$ par $f(x)=x^2-4x+3\ln(2x-1)$
   Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

   a. $y=4x-7$ **b.** $y=2x-4$
   c. $y=-3(x-1)+4$ **d.** $y=2x-1$

4. L'ensemble S des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\ln(x+3)<2\ln(x+1)$ est :

   a. $S=]-\infty\,;\,-2[\cup]1\,;\,+\infty[$ **b.** $S=]1\,;\,+\infty[$
   c. $S=\emptyset$ **d.** $S=]-1\,;\,1[$

Exercice 2 **4 points**

1. Résoudre chacune des équations différentielles suivantes sur l'ensemble I donné :

   a. $y'=\dfrac{6x}{\sqrt{x^2+3}}$ sur I$=\mathbb{R}$

   b. $y'=x(-4x^2+5)^4$ sur I$=\mathbb{R}$

2. Soit γ la fonction définie sur $I=]2;+\infty[$ par $\gamma(x)=\dfrac{x+13}{(x+3)(2-x)}$.

   a. Déterminer les réels a, et b tels que, pour tout x de I, on ait : $\gamma(x)=\dfrac{a}{x+3}+\dfrac{b}{2-x}$.

   b. En déduire la primitive Γ de γ définie sur I et vérifiant $\Gamma(3)=\ln 4$.

Exercice 3 **5 pts**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)+\dfrac{1}{3}x$

1. Montrez que pour tout réel x, $f(x)=\ln\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)-\dfrac{2}{3}x$
2. Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Soit f', définie sur $\mathbb{R}$, la fonction dérivée de f.

   a. Montrez que, pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-2}{3(\mathrm{e}^{x}+1)}$

   b. En déduire le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.

Tournez svp!

EXERCICE 4 **5 pts**

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.
Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

- si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
- si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6. À la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'évènement « le jeton tiré est blanc » et G l'évènement « le joueur gagne le jeu ».
L'événement contraire d'un évènement E sera noté $\overline{\mathrm{E}}$.
La probabilité d'un évènement E sera notée $p(\mathrm{E})$.

Partie A

1. Montrer que $p(\mathrm{G}) = \dfrac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

- chaque joueur paie 1 € par partie ;
- si le joueur gagne la partie, il reçoit 5 € ;
- si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.

1. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.

   a. Donner la loi de probabilité de X.

   b. Calculer son espérance $\mathrm{E}(X)$. Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?

2. L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc.
Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il favorable à l'organisateur ?

EXERCICE 5 Délit de fuite ! **2 pts**

Un taxi est mêlé à un accident nocturne avec délit de fuite. Dans la ville où cet accident s'est produit il y a deux compagnies de taxis, l'une utilise des véhicules bleus, l'autre des verts. On donne les renseignements suivants :

— 85% des taxis de la ville sont bleus et 15% sont verts.

— Un témoin de l'accident affirme que le taxi impliqué était vert.

Le tribunal fait analyser la capacité du témoin à distinguer, dans des conditions d'éclairement similaires, les véhicules des deux compagnies. Durant cette série d'essais le témoin identifia la couleur correcte (qu'elle soit verte ou bleue) dans 80% des cas et se trompa dans 20% des cas.

Quelle est la probabilité que le taxi impliqué dans l'accident soit réellement vert ?