Corrigé DS n° 5

Exercice 1 .... 6 pts

1. (a) $AI^2 = AE^2 + EI^2$ (Théo de Pythagore).
$= 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$
De même on a : $GI^2 = GF^2 + FI^2$.
$= 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$
Donc le triangle AIG est isocèle en I. 1 pt

(b) $\overrightarrow{IG}\cdot\overrightarrow{IA} = \left(\overrightarrow{IF}+\overrightarrow{FG}\right)\cdot\overrightarrow{IA}$
$= \overrightarrow{IF}\cdot\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{IA}$
Or $\overrightarrow{IF}\cdot\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IF}\cdot\overrightarrow{IE}$ (car $\overrightarrow{IE}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{IA}$ sur $\overrightarrow{IF}$).
$= -\overrightarrow{IF}^2 = -\frac{1}{4}$.
Et $\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{IA} = 0$ car $(FG)\perp(ABF)$ et $(IA)\subset(ABF)$ donc $(FG)\perp(IA)$)

Donc $\overrightarrow{IG}\cdot\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{4}$ 1,25 pts

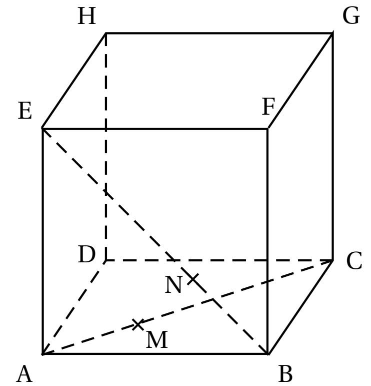
(c) $\overrightarrow{IG}\cdot\overrightarrow{IA} = IG \times IA \times \cos\left(\widehat{AIG}\right)$
D'où $\cos\left(\widehat{AIG}\right) = \dfrac{\overrightarrow{IG}\cdot\overrightarrow{IA}}{IG\times IA} = \dfrac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}} = -\frac{1}{5}$
Donc $\widehat{AIG} = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{5}\right) \approx 101,5°$ 1 pt

2. (a) $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AG} = \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}\right)$
$= \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BG}$
$= -1 + 0 + 0 + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{BG}$
$= \frac{1}{2}BG^2 - 1$
$= \frac{1}{2}\times(\sqrt{2}^2) - 1 = 0$ 1,25 pts

(b) $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AI} = \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EI}\right)$
$= \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{EI} + \overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{EI}$
$= 0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 0$ 1 pt

(c) (BK) est donc orthogonale à (AG) et (AI), droites non parallèles du plan (AIG). Donc (BK) est la hauteur issue de B dans le tétraèdre BAGI. 0,5 pt

Exercice 2 .... 3,5 pts



L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$

1. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $C(1;1;0)$ donc $M\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};0\right)$ 0,5 pt

2. Soit $N(x;y;z)$.

$$\overrightarrow{GN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GE} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BG} \iff \begin{cases} x-1 = \frac{1}{3}(0-1) - \frac{2}{3}(1-1) \\ y-1 = \frac{1}{3}(0-1) - \frac{2}{3}(1-0) \\ z-1 = \frac{1}{3}(1-1) - \frac{2}{3}(1-0) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-1 = -\frac{1}{3} \\ y-1 = -1 \\ z-1 = -\frac{2}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Donc $N\left(\frac{2}{3};0;\frac{1}{3}\right)$ 1,5 pts

3. $\overrightarrow{BN}\begin{pmatrix} \frac{2}{3}-1 \\ 0-0 \\ \frac{1}{3}-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc on a bien $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$. 0,5 pt

4. $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{EB}=\frac{1}{3}+0-\frac{1}{3}=0$ donc (MN) $\perp$ (EB)

$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+0=0$ donc (MN) $\perp$ (AC)

Donc on a :

- M $\in$ (AC)
- N $\in$ (EB)
- (MN) $\perp$ (EB)
- (MN) $\perp$ (AC)

Donc (MN) est bien la perpendiculaire commune aux droites (EB) et (AC). 1 pt

EXERCICE 3 .... 2 pts

$$\begin{aligned}AB^2-BC^2+CD^2-DA^2&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA})\\&=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA})\\&=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})-\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA})\\&=\overrightarrow{AC}\cdot\left[\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\right]\\&=\overrightarrow{AC}\cdot\left[\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\right]\\&=\overrightarrow{AC}\cdot\left[2\overrightarrow{DB}\right]\\&=2\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}\end{aligned}$$

EXERCICE 4 .... 11 pts

Partie A

Soit la fonction g définie sur D=]0 ; $+\infty$[par $g(x)=2\ln(x)+x-2$

1. • $\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to 0}(2\ln x)&=&-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0}(x-2)&=&-2\end{array}\right\}\Rightarrow$ (par somme) $\lim\limits_{0} g=-\infty$. 0,5 pt

   • $\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to+\infty}(2\ln x)&=&+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)&=&+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$ (par somme) $\lim\limits_{+\infty} g=+\infty$. 0,5 pt

2. Sur]0 ; $+\infty$[, on a $g(x)=2\ln x+x-2$, d'où :
   $g'(x)=2\times\frac{1}{x}+1=\frac{2}{x}+1$.
   Comme $x>0$, $g'(x)>0$ sur l'intervalle]0 ; $+\infty$[.
   La fonction g est donc strictement croissante sur D. 0,5 pt

3. (a) • g est continue car dérivable sur D=]0 ; $+\infty$[, et g est strict. croissante sur D.
   • L'intervalle image de D par g est $]-\infty;+\infty[$, qui contient 0.
   • Donc, d'après le « théo. de la bijection », l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α sur D. 1,5 pt

   (b) La calculatrice donne :
   $g(1)=-1$ et $g(2)\approx 1,4$, donc $1<\alpha<2$;
   $g(1,3)\approx -0,175$ et $g(1,4)\approx 0,07$, donc $1,3<\alpha<1,4$;
   $g(1,37)\approx -0,0004$ et $g(1,38)\approx 0,02$, donc $1,37<\alpha<1,38$ 0,5 pt

4. D'où le tableau de signe : 0,5 pt

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

Soit f définie sur D par : $f(x)=\frac{(x-2)}{x}\ln(x)$

1. (a) On a successivement :
   $\lim\limits_{x\to 0}(x-2)=-2$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}x=0^+$, d'où par quotient $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(x-2)}{x}=-\infty$;
   D'autre part $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$, donc par produit : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$. 1 pt

   (b) On en déduit que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$. 0,5 pt

2. • On a $\frac{x-2}{x}=\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x}=1-\frac{2}{x}$
   Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x}=1$.
   • D'autre part on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.
   Donc par produit de limites, on a $\lim\limits_{+\infty}f=+\infty$. 1 pt

3. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle]0 ; $+\infty$[,
   $f(x)=\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x$
   $f'(x)=\left(\frac{2}{x^2}\right)\ln x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\times\frac{1}{x}=\frac{2\ln x}{x^2}+\frac{x-2}{x}\times\frac{1}{x}=\frac{2\ln x+x-2}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$. 1,5 pt

4. Comme $x^2>0$ sur]0 ; $+\infty$[, le signe de $f'(x)$ sur cet intervalle est celui de $g(x)$.
   On a vu à la question A. 4. que :
   • sur]0 ; α[, $g(x)<0$: la fonction f est donc décroissante sur]0 ; α[;
   • sur]α ; $+\infty$[, $g(x)>0$: la fonction f est donc croissante sur]α ; ∞[. 1 pt

Partie C 2 pts

Soit $d(x) = f(x) - \ln x$ pour $x > 0$.

$$d(x) = \frac{(x-2)}{x}\ln(x) - \ln x = \ln x\left[\frac{(x-2)}{x} - 1\right] = \ln x\left[\frac{x-2-x}{x}\right] = \frac{-2}{x}\ln x.$$

La position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la courbe représentative de la fonction ln est donnée par le signe de la fonction d.

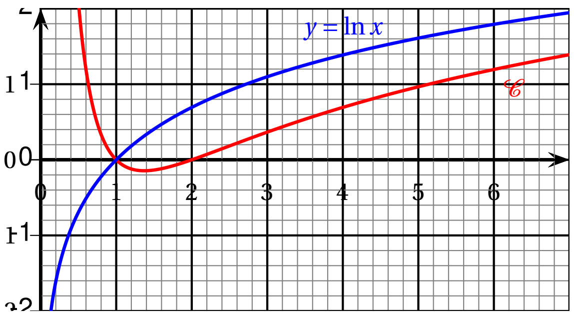
Comme $x > 0$, le signe de $d(x)$ est celui du produit $-2\ln x$.

On dresse donc un tableau de signes :

x	0		1		$+\infty$
-2	‖	$-$		$-$	
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
$-2\ln x$	‖	$+$	0	$-$	

Conclusion :

- sur $]0\,;\,1[$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la courbe logarithme népérien et,
  - sur $]1\,;\,+\infty[$ la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessous de la courbe logarithme népérien.



Exercice 5 .... $\boxed{6 \text{ pts}}$

1. « $\mathscr{C}_n$ admet une tangente horizontale » $\iff$ nombre dérivé nul. 0,5 pt

   $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = 2ne^x - 2e^{2x} = 2e^x(n - e^x)$. 0,5 pt

   $f_n'(x) = 0 \iff n - e^x = 0$ (car $2e^x \neq 0$ sur $\mathbb{R}$)
   $\iff x = \ln n$ 0,5 pt

   $\mathscr{C}_n$ admet donc une tangente horizontale en un unique point S_n d'abscisse $x = \ln n$.

   Son ordonnée est $y = f_n(\ln n) = 2ne^{\ln n} - e^{2\ln n} = 2n^2 - e^{\ln n^2} = 2n^2 - n^2 = n^2$ 0,5 pt

   Donc la proposition est vraie.

2. $f(x) = x^2\ln x$ sur D$=]0;+\infty[$.
   f est dérivable sur D en tan que produit de fonctions dérivables sur D.
   $\forall x \in \mathrm{D},\ f'(x) = 2x\ln x + x^2 \times \dfrac{1}{x} = 2x\ln x + x.$ 0,5 pt

   Soit T_a la tangente à la courbe de f en a ($a \in]0;+\infty[$). T_a : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
   $y = (2a\ln a + a)(x-a) + a^2\ln a$ 0,5 pt

   $$\begin{aligned} \mathrm{O} \in T_a &\iff 0 = (2a\ln a + a)(0-a) + a^2\ln a \\ &\iff -2a^2\ln a - a^2 + a^2\ln a = 0 \\ &\iff -a^2\ln a - a^2 = 0 \\ &\iff a^2\ln a + a^2 = 0 \\ &\iff \ln a + 1 = 0 \quad \text{car } a \neq 0 \\ &\iff \ln a = -1 \\ &\iff a = e^{-1} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

   0,5 pt (première équivalence) ; 0,5 pt (dernière équivalence)

   Donc la proposition est fausse. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{e}$ passe par l'origine du repère. 2 pts

3. Pour tout $x > 0$, on a : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x - \ln x} = \dfrac{\ln x}{\ln x\left(\frac{x}{\ln x} - 1\right)} = \dfrac{1}{\frac{x}{\ln x} - 1}$

   Or $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$
   D'où par quotient $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\ln x} = 0$
   D'où $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\ln x} - 1\right) = -1$
   D'où par inverse $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1 = f(0)$

   Donc f est bien continue en zéro. 2 pts