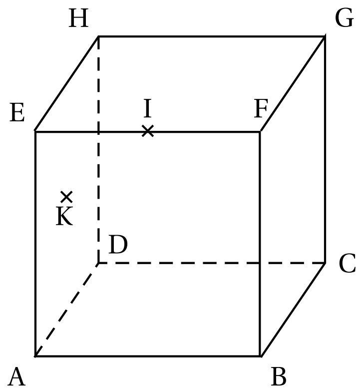
Barème sur 25 points

EXERCICE 1 **5 pts**

ABCDEFGH est un cube d'arête 1. I est le milieu de [EF] et K est le centre de la face ADHE.



Répondre aux questions suivantes sans utiliser de repère !

1. **a.** Justifier que le triangle AIG est isocèle.

   b. Montrer que $\overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{IA} = -\frac{1}{4}$

   c. En déduire une valeur arrondie à 0,1 degré de l'angle $\widehat{AIG}$

2. **a.** En écrivant $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$, calculer $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AG}$

   b. Calculer de même $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AI}$

   c. Quelle droite est la hauteur issue de B dans le tétraèdre BAGI ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 2 **3 pts**

ABCDEFGH est un cube. M et N sont les points définis par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{GN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GE} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BG}$

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$

1. Donner sans justifier les coordonnées du point M.
2. Déterminer les coordonnées du point N.
3. Vérifier que $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$.
4. Montrer que la droite (MN) est la perpendiculaire commune aux droites (EB) et (AC).

EXERCICE 3 **2 pts**

Soit A, B, C et D quatre points quelconques de l'espace.

Démontrer que : $AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 2\,\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$

Tournez svp !

EXERCICE 4 **10,5 pts**

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $\quad g(x) = 2\ln x + x - 2$.

1. Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
3. **a.** Démontrer qu'il existe un unique réel strictement positif α tel que $g(\alpha) = 0$.

   b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4. En déduire le tableau de signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $\quad f(x) = \dfrac{(x-2)}{x}\ln(x)$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 0.

   b. Interpréter graphiquement le résultat.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
4. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$,

Partie C

Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la courbe représentative de la fonction ln sur $]0\ ;\ +\infty[$.

EXERCICE 5 **4,5 points**

Les trois questions suivantes sont indépendantes.
Indiquer dans chacune d'elle si la proposition donnée est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

1. Soit n un entier strictement positif.
   Soit la fonction f_n définie sur l'ensemble des nombres réels par $\quad f_n(x) = 2n\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}$.
   Soit $\mathscr{C}_n$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

   Proposition : « $\mathscr{C}_n$ admet une tangente horizontale en un unique point S_n dont les coordonnées sont $(\ln n\ ;\ n^2)$ ».

2. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $\quad f(x) = x^2\ln x$.
   On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

   Proposition : « il n'existe pas de tangente à $\mathscr{C}$ passant par l'origine du repère ».

3. Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $\left\{\begin{array}{lcll} f(x) & = & \dfrac{\ln x}{x-\ln x} & \text{si } x>0 \\ f(0) & = & -1 & \end{array}\right.$

   Proposition : « f est continue en zéro ».