Exercice 1 (5 pts)

Corrigé DS n° 4

1. • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$ (limite **à l'infini** d'une **fonction rationnelle**) 1 pt

• tableau de signe de $3-x$:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$3-x$		$+$	0	$-$	

• $$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}}(3-x) & = & 0^- \\ \lim\limits_{x\to3}(x^2-5x+8) & = & 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x) = -\infty \quad \text{(par quotient)}$$ 1 pt

On déduit de cette dernière limite que la droite d'équation $x=3$ est asymptote à la courbe de f. 0.5 pt

2. $\forall x \in D_f,\ f'(x) = \dfrac{(2x-5)(3-x)-(-1)(x^2-5x+8)}{(3-x)^2} = \ \dots\ = \dfrac{-x^2+6x-7}{(3-x)^2}$ 1 pt

Tableau de variations de f :

Racines de $-x^2+6x-7$: $x_1 = \dfrac{-6-\sqrt{8}}{-2} = 3+\sqrt{2}$ et $x_2 = -3-\sqrt{2}$

x	3		$3+\sqrt{2}$		$+\infty$
$-x^2+6x-7$		$+$	0	$-$	
$(3-x)^2$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f(x_1)$	↘	$-\infty$

La fonction f admet donc un maximum atteint en $3+\sqrt{2}$. 1,5 pts

Exercice 2 (5 pts)

Proposition n° 1 1,5 pts

Si une fonction f est telle que, pour tout réel x, $e^{-2x} < f(x) < e^{1-2x}$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

VRAI.

En effet : $$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to-\infty}(-2x) & = & +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty}\left(e^X\right) & = & +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = +\infty \quad \text{(par composée)}$$

Or, pour tout réel x, $f(x) > e^{-2x}$

Donc par comparaison on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Proposition n° 2 1,5 pts

Si une fonction f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

FAUX. Pour contre-exemple, il suffit de prendre par exemple $f(x) = \dfrac{-1}{x}$ qui est strictement croissante mais tend vers zéro en $+\infty$.

Proposition n° 3 2 pts

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2+2)e^{-x}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

On peut affirmer que $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion d'abscisse $x=2$.

FAUX. Pour le justifier, étudions le signe de la dérivée seconde de f.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (2x-x^2-2)e^{-x}$

et $f''(x) = (2-2x-2x+x^2+2)e^{-x} = (x^2-4x+4)e^{-x} = (x-2)^2 e^{-x}$

Donc $f''(x)=0$ pour $x=2$, mais $f''(x)$ ne change pas de signe en 2 car $(x-2)^2$) et e^{-x} sont positifs sur $\mathbb{R}$.

Donc la courbe de f n'a pas de point d'inflexion.

Exercice 3 (5,5 pts)

1. $\forall x \in \mathbb{R},\quad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ 2 pts

d'où : $4 \leqslant 5-\cos x \leqslant 6$

d'où : $\dfrac{1}{4} \geqslant \dfrac{1}{5-\cos x} \geqslant \dfrac{1}{6}$ (fonction inverse décroissante sur $]0;+\infty[$)

d'où pour x négatif (vu que l'on cherche la limite en $-\infty$) :

$$\frac{7x}{4} \leqslant \frac{7x}{5-\cos x} \leqslant \frac{7x}{6}$$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{7x}{6}\right) = -\infty$ d'où par comparaison : $\lim\limits_{x\to-\infty}\Gamma(x) = -\infty$

2. Posons $u(x) = \dfrac{x^3+x-1}{3x-x^2}$. 2 pts

tableau de signe de $3x-x^2 = x(3-x)$:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$3x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to 0}(x^3+x-1) & = & -1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(3x-x^2) & = & 0^-\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} u(x) = +\infty \quad \text{(par quotient)}$$

Or $\Psi=\sqrt{u}$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$

D'où par composée $\lim\limits_{x\to 0^-}\Psi=+\infty$

3. $\Phi(x)=\dfrac{3x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1}=\dfrac{x\left(3-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)}=\dfrac{3-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+\frac{1}{x}}.$ $\boxed{1{,}5\text{ pts}}$

$$\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) & = & 3 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right) & = & +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\Phi(x)=0$$

EXERCICE 5 (6 PTS)

1. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}$

$\dfrac{x_{\overrightarrow{AD}}}{x_{\overrightarrow{AC}}}=\dfrac{-2}{2}=-1 \qquad \dfrac{y_{\overrightarrow{AD}}}{y_{\overrightarrow{AC}}}=\dfrac{0}{4}=0\neq-1$

$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, C et D non alignés définissent un plan. **Affirmation vraie.** $\boxed{1{,}5\text{ pts}}$

2. Testons si $\overrightarrow{AD}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix}$

On cherche s'il existe un couple de réels $(\alpha;\beta)$ tels que : $\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$

$$\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD} \iff \left\{\begin{array}{rcl}-2\alpha+2\beta & = & -2\\ 4\alpha+4\beta & = & 0\\ 3\alpha+\beta & = & 4\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}\alpha-\beta & = & 1\\ \beta & = & -\alpha\\ 3\alpha+\beta & = & 4\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl}2\alpha & = & 1\\ \beta & = & -\alpha\\ 2\alpha & = & 4\end{array}\right.$$

Il n'y a donc pas de solution (car $1\neq 4$) donc ces trois vecteurs ne sont pas coplanaires, donc les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires. **Affirmation fausse** $\boxed{2\text{ pts}}$.

3. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\end{pmatrix}$

- (AC) et (BH) sont-elles parallèles ?

$\dfrac{x_{\overrightarrow{BH}}}{x_{\overrightarrow{AC}}}=\dfrac{-1}{2} \qquad \dfrac{y_{\overrightarrow{BH}}}{y_{\overrightarrow{AC}}}=\dfrac{-3}{4}\neq\dfrac{-1}{2}$

$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BH}$ ne sont pas colinéaires, donc (AC) et (BH) ne sont pas parallèles.

- (AC) et (BH) sont-elles coplanaires ?

Cela équivaut à étudier la coplanéarité des points A, B, C et H.

Testons si $\overrightarrow{AH}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$

On cherche s'il existe un couple de réels $(\alpha;\beta)$ tels que : $\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AH}$

$$\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AH} \iff \left\{\begin{array}{rcl}-2\alpha+2\beta & = & -3\\ 4\alpha+4\beta & = & 1\\ 3\alpha+\beta & = & 2\end{array}\right. \quad \text{(S)}$$

Soit S' le sous-système formé par les deux premières équations.

$$\text{S'} \iff \left\{\begin{array}{rcl}-2\alpha+2\beta & = & -3\\ 4\alpha+4\beta & = & 1\end{array}\right.$$

d'où : $8\beta=-5 \quad (2L_1+L_2)$
$8\alpha=7 \quad (-2L_1+L_2)$

d'où : $\beta=\dfrac{-5}{8}$
$\alpha=\dfrac{7}{8}$

On teste si ce couple vérifie ou pas la troisième équation du système (S).

$3\times\dfrac{7}{8}-\dfrac{5}{8}=\dfrac{16}{8}=2 \quad \to$ 3ème équation vérifiée !

Donc on a : $\overrightarrow{AH}=\dfrac{7}{8}\overrightarrow{AB}-\dfrac{5}{8}\overrightarrow{AC}$

Les droites (AC) et (BH) sont coplanaires.
Et comme elles ne sont pas parallèles, elles sont sécantes. **Affirmation vraie**.

$\boxed{\text{2 pts}}$