Partie A   Etude de g : $x \longrightarrow (2-x)\,e^x - 2$

T Spé - Corrigé D.S. n° 4 – ex 4   9,5 pts

1. a/ $g(0) = 2\,e^0 - 2 = 0$ 0,25 pt

b/ g est dérivable sur IR en tant que produit et somme de fonctions dérivables sur IR.   1,25 pt

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (-1)\,e^x + (2-x)\,ex = (-1+2-x)\,e^x = (1-x)\,e^x$

donc g '(x) est du signe de $1-x$ sur IR   car $e^x > 0$ sur IR

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$1-x$		+			0	−	
$g(x)$		↗	0	↗	$e-2$	↘	

2. • $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ and $\lim\limits_{x\to+\infty} (2-x) = -\infty$ $\underset{\text{produit}}{\overset{\text{par}}{\Rightarrow}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} [(2-x)\,e^x] = -\infty$ $\underset{\text{somme}}{\overset{\text{par}}{\Rightarrow}}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} [(2-x)\,e^x - 2] = -\infty}$

• $\begin{cases} \text{g est strictement croissante sur }]-\infty, 1] \\ g(0) = 0 \end{cases}$ donc 0 est la seule solution de g(x) = 0 sur cet intervalle.

• g est continue car dérivable sur I = [1 ; + ∞ [2 pts

g est strictement décroissante sur I et l'intervalle image de I par *g* est J =] – ∞ ; e – 2] qui contient 0.

Donc, d'après le théo. de la bijection, on en déduit que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique $\boxed{\alpha}$ sur I.

• $\boxed{\text{Bilan : il existe un réel non nul unique, } \alpha, \text{ tel que } g(\alpha) = 0}$.

3. 0,5 pt

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
g(x)		−	0	+	0	−	

4. Par balayage, on obtient : $\boxed{\alpha \approx 1{,}59}$ 0,5 pt

Partie B   Etude de f : $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1}$ pour *x* non nul.

1. a/ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ and $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - 1 = -1$ $\underset{\text{quotient}}{\overset{\text{par}}{\Rightarrow}}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{e^x-1} = -\infty}$ 1 pt

b/ $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \dfrac{x^2}{e^x\,(1 - 1/e^x)}$ 1 pt

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$ par croissance comparée

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{e^x}\right) = 1$

$\underset{\text{quotient}}{\overset{\text{par}}{\Rightarrow}}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x\,(1-1/e^x)} = 0}$

Donc l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe de f en + ∞.   0,5 pt

2. f est dérivable sur R* en tant que quotient de fonctions dérivables sur R* avec un dénominateur ne s'annulant pas sur R*.

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \dfrac{2x\,(e^x-1) - e^x \times x^2}{(e^x-1)^2} = \dfrac{2x\,e^x - 2x - x^2\,e^x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{x\,(2e^x - 2 - x\,e^x)}{(e^x-1)^2} = \dfrac{x\,[(2-x)\,e^x - 2]}{(e^x-1)^2} = \dfrac{x\,g(x)}{(e^x-1)^2}$ 1,5 pts

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ (e^x - 1)^2 > 0$ donc f '(x) est du signe de x g(x) sur R* .

1 pt

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
g(x)		−	0	+	0	−	
x		−	0	+		+	
f '(x)		+	0	+	0	−	
f(x)	$-\infty$	↗	0	↗	$f(\alpha)$	↘	0