Corrigé DS n° 3

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad f(x) = (x^3 - x^2)\,\mathrm{e}^{2x}$

1. $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) • $u_1 = -2\,\mathrm{e}^{-2} \approx -0{,}271$;
   • $u_2 = f(u_1) = \left(-8\,\mathrm{e}^{-6} - 4\,\mathrm{e}^{-4}\right)\mathrm{e}^{-4\,\mathrm{e}^{-2}} = ... = -4\left(2\,\mathrm{e}^{-2} - 1\right)\mathrm{e}^{-4\,\mathrm{e}^{-2}-4}$.

   (b) Compléter le code pour que la commande `terme(n)` renvoie en sortie la valeur de u_n

```
def  terme(n):
     u=-1
     for i in range(n):
       u=(u**3-u**2)*exp(2*u)
     return u
```

2. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) &= \left(3x^2 - 2x\right)\mathrm{e}^{2x} + \left(x^3 - x^2\right)\left(2\,\mathrm{e}^{2x}\right)\\ &= \left(3x^2 - 2x + 2x^3 - 2x^2\right)\mathrm{e}^{2x}\\ &= \left(2x^3 + x^2 - 2x\right)\mathrm{e}^{2x}\\ &= x\left(2x^2 + x - 2\right)\mathrm{e}^{2x}\end{aligned}$$

Les racines du trinôme $2x^2 + x - 2$ sont $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}$ et $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}$

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x^2+x-2$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
e^{2x}		$+$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	

N.B. On vérifie qu'on a bien $\quad f(0) = (0^3 - 0^2)\,\mathrm{e}^0 = 0 \times 1 = 0$

   (b) $[-1;0] \subset]x_1\ ;\ 0]$, donc la fonction f est bien croissante sur $[-1;0]$

   (c) Démontrons , par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0. \qquad \to \text{Proposition P(n)}$$

Initialisation : avec $u_0 = -1$ et $u_1 \approx -0{,}271$, on a bien : $-1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 0$: l'encadrement est vrai au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0$.

On a donc par croissance de f : $f(-1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(0)$, ou encore : $u_1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant f(0)$

et comme $u_1 \approx -0{,}271$, $-1 \leqslant u_1$ et $f(0) = 0$, on a bien :
$-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 0$.

Donc, si P(n) est vraie alors P(n+1) aussi.

Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang n, $n \in \mathbb{N}$, il est encore vrai au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, on a : $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0$.

   (d) La question précédente montre que :
   - la suite (u_n) est croissante;
   - la suite (u_n) est bornée : majorée par 0 et minorée par -1.;

Exercice 2

a/ La fonction seuil() renvoie la valeur 11. C'est le rang à partir duquel on a $v_n \geqslant 50$.

b/ La fonction seuil() renvoie la valeur 0. En effet la boucle *while* n'est pas exécutée car la première valeur de v est inférieure à 50.

Exercice 3

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-4\\2\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$

$\dfrac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}} = \dfrac{6}{3} = 2 \qquad \dfrac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}} = \dfrac{-4}{1} = -4 \neq 2$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C non alignés définissent un plan.

2. Montrons que $\overrightarrow{DE}$ s'écrit comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$, et $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-3\\3\\-2\end{pmatrix}$

On cherche un couple de réels $(\alpha;\beta)$ tels que : $\quad \overrightarrow{DE} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{DE} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} \iff \left\{\begin{array}{lcl}6\alpha + 3\beta &=& -3\\ -4\alpha + \beta &=& 3\\ 2\alpha - 2\beta &=& -2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}2\alpha + \beta &=& -1\\ -4\alpha + \beta &=& 3\\ \alpha - \beta &=& -1\end{array}\right.$$

On résout le sous-système formé par les deux premières "lignes".

$$\left\{\begin{array}{lcl}2\alpha + \beta &=& -1\\ -4\alpha + \beta &=& 3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}\beta &=& -1 - 2\alpha\\ -4\alpha - 1 - 2\alpha &=& 3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}\beta &=& \dfrac{1}{3}\\ \alpha &=& -\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$$

On teste si la 3ème équation est vérifiée : $\alpha - \beta = -\dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3} = -1$ "OK"

Ainsi $\overrightarrow{DE} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont coplanaires.

3. Testons si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont coplanaires.

$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

On cherche un couple de réels $(\alpha;\beta)$ tels que : $\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ $\left\{\begin{array}{rcl} 6\alpha + 3\beta & = & -7 \\ -4\alpha + \beta & = & 0 \\ 2\alpha - 2\beta & = & -2 \end{array}\right.$

On résout le sous-système formé par les deux premières "lignes".

$$\left\{\begin{array}{rcl} 6\alpha + 3\beta & = & -7 \\ -4\alpha + \beta & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \beta & = & 4\alpha \\ 6\alpha + 12\alpha & = & -7 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \beta & = & -\dfrac{14}{9} \\ \alpha & = & -\dfrac{7}{18} \end{array}\right.$$

On teste si la 3ème équation est vérifiée : $2\alpha - 2\beta = -\dfrac{14}{18} + \dfrac{56}{18} = \dfrac{42}{18} = \dfrac{7}{3} \neq -2$

Donc le système n'a pas de solution, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires, donc le point E n'appartient pas au plan (ABC).

4. La droite (DE) est parallèle au plan (ABC) car le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est coplanaire à $\overrightarrow{AB}$, et $\overrightarrow{AC}$. Comme de plus le point E n'appartient pas au plan (ABC), on peut préciser que (DE) est strictement parallèle au plan (ABC) (car non incluse dans ce plan).

Exercice 4

1. figure
2. $$\begin{aligned} \overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GJ} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GC} \\ &= \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CF}\right) + \overrightarrow{FG} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FC}\right) \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{EC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FG} - \frac{2}{3}\overrightarrow{FG} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FC} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{EC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{FG} \qquad \text{car} \quad \frac{2}{3}\overrightarrow{CF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{0} \end{aligned}$$
3. $\overrightarrow{IJ}$ s'exprime donc comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$. On en déduit que ces trois vecteurs sont coplanaires.