Corrigé DS n° 2

Exercice 1 **3,5 pts**

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -2(x^2+1)^{-2024}$.
   on sait que $(u^n)' = n\, u'\, u^{n-1}$ pour tout n entier relatif.

   D'où, pour tout réel x : $f'(x) = -2(-2024)(2x)(x^2+1)^{-2025} = \dfrac{8096x}{(x^2+1)^{2025}}$

2. on sait que $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

   D'où, pour tout réel x : $g'(x) = \dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+3}} = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.

Exercice 2 **7 pts**

1. Soit une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) = (2x+1)^3 \mathrm{e}^{-x^2}$.
   (a) f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

   $$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) &= 3 \times 2 \times (2x+1)^2 \mathrm{e}^{-x^2} + (2x+1)^3(-2x)\mathrm{e}^{-x^2}\\ &= (2x+1)^2\mathrm{e}^{-x^2}\,[6+(2x+1)(-2x)]\\ &= (-4x^2-2x+6)(2x+1)^2\mathrm{e}^{-x^2}\\ &= -2(2x^2+x-3)(2x+1)^2\mathrm{e}^{-x^2}\end{aligned}$$

   (b) Etudions le signe de $f''(x)$:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$(2x+1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
e^{-x^2}		$+$		$+$		$+$		$+$	
-2		$-$		$-$		$-$		$-$	
$2x^2+x-3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

   On en déduit que :

   - f est convexe sur $\left[-\dfrac{3}{2};1\right]$
   - f est concave sur $\left]-\infty;-\dfrac{3}{2}\right]$ et sur $[1;+\infty[$
   - la courbe de f admet deux points d'inflexion d'abscisses $-\dfrac{3}{2}$ et 1.

2. (a) FAUX. La fonction f est croissante sur $[-1;1]$ car $f'(x) \geqslant 0$ sur $[-1;1]$
   (b) VRAI. La fonction f est concave sur $[1;2]$ car f' décroissante sur $[1;2]$.
   (c) VRAI. La courbe de f admet deux points d'inflexion car sa dérivée f' change de sens de variation en -1 et en 2.

Exercice 3 **3 pts**

La courbe $\mathscr{C}_2$ correspond à une fonction positive sur $\mathbb{R}$.
Or aucune des deux autres fonctions n'est croissante sur $\mathbb{R}$.
Donc $\mathscr{C}_2$ est forcément la courbe de f.

Comme f est croissante sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est positive.
C'est donc la courbe $\mathscr{C}_3$ qui correspond à la courbe de f'.

Reste la courbe $\mathscr{C}_1$ qui correspond à celle de f''.

Exercice 4 **6,5 pts**

1. f est dérivable sur $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, en tant que quotient de fonctions définies et dérivables sur cet intervalle, avec la fonction au dénominateur ne s'annulant pas sur l'intervalle.

   $$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\quad f'(x) &= \frac{\mathrm{e}^x \times (x-1) - \mathrm{e}^x \times 1}{(x-1)^2}\\ &= \frac{\mathrm{e}^x \times (x-1-1)}{(x-1)^2}\\ &= \frac{(x-2)\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}\end{aligned}$$

   D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$		$+$	
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	e^2	$\nearrow$	

2. Pour déterminer l'équation de T_0, il nous faut connaître $f'(0)$ et $f(0)$:

   $f'(0) = \dfrac{(0-2)\mathrm{e}^0}{(0-1)^2} = \dfrac{-2}{1} = -2$

   $f(0) = \dfrac{\mathrm{e}^0}{0-1} = \dfrac{1}{-1} = -1.$

La formule classique donne une équation pour T_0 :
$y = f'(0)(x-0) + f(0) \iff y = -2x-1$

L'équation réduite de T_0 est donc : $y = -2x-1$.

3. (a) Pour étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on va étudier le signe de $f''(x)$.
Comme, pour tout x dans $]-\infty\,;\,1[$, on a $(x-1) < 0$ et donc $(x-1)^3 < 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$, on en déduit que le signe de $f''(x)$ est l'opposé du signe du trinôme : x^2-4x+5.
Or, ce trinôme a un discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4\times 1\times 5 = -4$ qui est strictement négatif, donc n'admet pas de racine, et donne des images strictement positives (car le coefficient dominant est positif) pour tout réel x.
Finalement, la dérivée seconde f'' est à valeurs strictement négatives sur $]-\infty\,;\,1[$, on en déduit que la fonction f est concave sur $]-\infty\,;\,1[$.

(b) Puisque f est concave sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, la courbe $\mathscr{C}$ est donc située sous ses tangentes, notamment sous la tangente T, sur cet intervalle.
Pour tout réel x dans cet intervalle, l'ordonnée d'un point sur la courbe $\mathscr{C}$ (c'est-à-dire $f(x)$) est donc inférieure ou égale à l'ordonnée du point ayant la même abscisse sur la tangente T (or, sur la tangente T, l'ordonnée du point d'abscisse x est $-2x-1$, d'après la question précédente).
On en déduit donc :

$$\begin{aligned}
x \in]-\infty\,;\,1[&\implies f(x) \leqslant -2x-1\\
&\implies \frac{\mathrm{e}^x}{x-1} \leqslant -2x-1\\
&\implies \mathrm{e}^x \geqslant (x-1)(-2x-1)\\
&\qquad \text{car sur }]-\infty\,;\,1[,\quad x-1<0\\
&\implies \mathrm{e}^x \geqslant (-2x-1)(x-1)
\end{aligned}$$

On arrive donc à l'inégalité demandée.