Corrigé DS n° 1

Exercice 1 **1,5 pts**

Soit A un réel négatif.

Montrons qu'il existe un rang N à partir duquel $u_n \leqslant A$.

$$u_n \leqslant A \Longleftrightarrow -5n^2 \leqslant A \Longleftrightarrow n^2 \geqslant -\frac{A}{5} \Longleftrightarrow n \geqslant \sqrt{-\frac{A}{5}}$$

Soit N le premier entier supérieur à $\sqrt{-\dfrac{A}{5}}$.

Si $n \geqslant N$, alors $u_n \leqslant A$.

On a donc montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} -5n^2 = -\infty$

Exercice 2 **4,5 pts**

1. On cherche a et b tel que $f(-1) = -7$ et $f'(-1) = 0$

   - $f(-1) = -a + b - 4 = -7$
   - f est dérivable sur D en tant que fonction rationnelle définie sur cet intervalle et

     $\forall x \in D, \quad f'(x) = a + 8 \times \dfrac{-1}{(x-1)^2} = a - \dfrac{8}{(x-1)^2}$

     d'où $f'(-1) = a - 2$
   - $\begin{cases} f(-1) = -7 \\ f'(-1) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -a+b-4 = -7 \\ a-2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ -a+b = 4-7 \end{cases}$

     D'où $\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$
   - bilan : $\forall x \in D, \quad f(x) = 2x - 1 + \dfrac{8}{x-1}$ **2 pts**

2. $\forall x \in D,$
$$f(x) = 2x - 1 + \frac{8}{x-1} = \frac{(2x-1)(x-1)+8}{x-1} = \frac{(2x^2-2x-x+1+8}{x-1} = \frac{2x^2-3x+9}{x-1}$$
0,75 pt

3. $\forall x \in D, \quad f'(x) = \dfrac{(4x-3)(x-1)-(1)(2x^2-3x+9)}{(x-1)^2} = \ldots = \dfrac{2x^2-4x-6}{(x-1)^2}$ **0,75 pt**

4. **1 pt**

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$2x^2-4x-6$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	-7	$\searrow$	‖	$\searrow$	9	$\nearrow$	

Exercice 3 **3,5 pts**

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \dfrac{2-3n^2}{n^2+n+1} = \dfrac{n^2\left(-3+\dfrac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{-3+\dfrac{2}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$

  Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-3+\dfrac{2}{n^2}\right) = -3$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right) = 1$

  d'où (par quotient) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = -3$ **1 pt**

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \dfrac{\sqrt{n}-n}{1-3n} = \dfrac{n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-1\right)}{n\left(\dfrac{1}{n}-3\right)} = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{n}}-1}{\dfrac{1}{n}-3}$

  Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n}\right) = +\infty$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-1\right) = -1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}-3\right) = -3$

  d'où (par quotient) $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = \dfrac{1}{3}$ **1,25 pts**

- $\forall n \in \mathbb{N}, \; -1 \leqslant \cos n \leqslant 1$

  d'où, pour tout entier n : $-n^3-5 \leqslant w_n \leqslant -n^3+5$

  Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-n^3+5\right) = -\infty$

  d'où (par comparaison) $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n) = -\infty$ **1,25 pts**

EXERCICE 4 **4 pts**

Proposition n° 1 : toute suite bornée admet une limite.

FAUX. Contre-exemple : $u_n = (-1)^n$.

(u_n) est bornée car, pour tout entier n, on a $u_n \in [-1;1]$, mais cette suite n'admet pas de limite puisque les termes de rangs pairs tendent vers 1 alors que ceux de rang impairs tendent vers -1.

Proposition n° 2 : une suite décroissante est majorée.

VRAI. Si (u_n) est décroissante, alors elle est majorée par son premier terme.

Proposition n° 3 : si (u_n) tend vers un réel ℓ, alors (v_n) tend vers le réel $\dfrac{-2}{\ell}$

FAUX. Si (u_n) converge vers zéro, alors (v_n) tend vers l'infini donc ne converge pas vers un réel. (prendre par exemple $u_n = \dfrac{1}{n}$, on a alors $v_n = \dfrac{-2}{u_n} = -2n$)

Proposition n° 4 : si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.

VRAI. Si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$, alors $\dfrac{1}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$ d'où $\dfrac{-2}{u_n} \geq -1$

donc la suite (v_n) est minorée par -1.

EXERCICE 5 **3,5 pts**

1. Etude du sens de variation de la suite :

— **Méthode 1** : étude du signe de $u_{n+1} - u_n$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \frac{4(n+1)-1}{n+2} - \frac{4n-1}{n+1}$$
$$= \frac{(4n+3)(n+1)-(n+2)(4n-1)}{(n+2)(n+1)} = \ldots = \frac{5}{(n+2)(n+1)} > 0$$

Donc la suite (u_n) est croissante.

— **Méthode 2** : étude des variations sur $I = [0;+\infty[$ de la fonction f telle que $u_n = f(n)$

On a $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+1}$

$$\forall x \in I, f'(x) = \frac{4(x+1)-(1)(4x-1))}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2} > 0$$

f est croissante sur I, donc la suite (u_n) est croissante. $\boxed{\text{1,5 pts}}$

2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - 4 = \dfrac{4n-1}{n+1} - 4 = \dfrac{-5}{n+1} < 0$

Donc on a bien $u_n < 4$ pour tout entier n.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - (-1) = \frac{4n-1}{n+1} + 1 = \frac{5n}{n+1} \geqslant 0$$

Donc on a bien $u_n \geqslant -1$ pour tout entier n.

N.B. on pouvait aussi remarquer que $u_0 = -1$ et donc comme (u_n) croissante, conclure que, pour tout n, $u_n \geqslant u_0$, soit $u_n \geqslant -1$.

Bilan : pour tout entier n, on a : $u_n \in [-1;4[$ $\boxed{\text{2 pts}}$

EXERCICE 6 **8 pts**

1. Diminuer de 10% c'est multiplier par $1 - \dfrac{10}{100} = 1 - 0,10 = 0,9$.

Pour calculer l'effectif de l'année $n+1$, on multiplie donc l'effectif de l'année n, u_n, par 0,9 puis on l'augmente de 100 : on a donc bien, pour tout entier n :

$u_{n+1} = 0,9u_n + 100$ $\boxed{\text{0,5 pt}}$

2. • $u_0 = 2000$,d'où $u_1 = 0,9 \times 2000 + 100 = 1800 + 100 = 1900$;
   • $u_1 = 1900$,d'où $u_2 = 0,9 \times 1900 + 100 = 1710 + 100 = 1810$. $\boxed{\text{0,5 pt}}$

3. Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : $1000 < u_{n+1} \leqslant u_n$.

Initialisation : $1000 < 1900 \leqslant 2000$, soit $1000 < u_1 \leqslant u_0$.

Donc la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie au rang $n = 0$

Hérédité : on suppose que pour un entier n donné, $1000 < u_{n+1} \leqslant u_n$.

En multipliant chaque membre par 0,9, on obtient :

$0,9 \times 1000 < 0,9 \times u_{n+1} \leqslant 0,9 \times u_n$

puis en ajoutant 100 à chaque membre on obtient :

$900 + 100 < 0,9u_{n+1} + 100 \leqslant 0,9u_n + 100$, soit :

$1000 < u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.

On a ainsi montré que : $\mathscr{P}(n)$ vraie $\implies \mathscr{P}(n+1)$ vraie

Bilan : on peut donc conclure,d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel n : $1000 < u_{n+1} \leqslant u_n$. $\boxed{\text{2 pts}}$

4. La récurrence précédente montre que :

— la suite (u_n) est décroissante $(u_{n+1} \leqslant u_n)$ $\boxed{\text{0,25 pt}}$

— la suite (u_n) est minorée par 1 000

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1000$.

(a) Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 1000$, soit $v_{n+1} = 0,9u_n + 100 - 1000$, ou encore $v_{n+1} = 0,9u_n - 900 = 0,9(u_n - 1000)$ et enfin :

$$v_{n+1} = 0,9v_n.$$

Cette égalité vraie pour tout naturel n montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9. $\boxed{\text{1,5 pt}}$

(b) On a $v_0 = u_0 - 1000 = 2000 - 1000 = 1000$.
On sait que pour tout naturel n, $v_n = v_0 \times q^n$ (avec $q = 0,9$), soit :
$v_n = 1000 \times 0,9^n$.
Or $v_n = u_n - 1000 \iff u_n = v_n + 1000$

donc $u_n = 1000 \times 0,9^n + 1000 = 1000\left(1 + 0,9^n\right)$. 1 pt

(c) Comme $-1 < 0,9 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + 0,9^n = 1$ et par conséquent : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1000$ 0,75 pt

Cela signifie qu'au bout de nombreuses années la population va se rapprocher de 1 000 individus. 0,5 pt

6.

1 pt

```
def population(S) :
  n=0
  u=2000

  while u >=S:
    u= 0.9*u+100
    n = n + 1
  return n
```