Barème sur 25 points

Exercice 1 — 1,5 pts

Démontrer, **à l'aide de la définition**, que $\lim\limits_{n \to +\infty} -5n^2 = -\infty$.

Exercice 2 — 4,5 pts

Soit la fonction rationnelle f définie sur $\mathbb{R}_{\setminus\{1\}}$ par $f(x) = ax + b + \dfrac{8}{x-1}$ où a et b sont des réels.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. Déterminer a et b tels que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A de coordonnées $(-1;-7)$ et admette une tangente horizontale en ce point.
2. Vérifier que $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 9}{x-1}$ sur $\mathbb{R}_{\setminus\{1\}}$
3. Calculer $f'(x)$.
4. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_{\setminus\{1\}}$

Exercice 3 — 3,5 pts

Etudier la limite de chacune des suites suivantes, définies pour tout entier n :

$$u_n = \frac{2 - 3n^2}{n^2 + n + 1} \qquad v_n = \frac{\sqrt{n} - n}{1 - 3n} \qquad w_n = -n^3 - 5\cos n$$

Exercice 4 — 4 pts

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier vos réponses.

Proposition n° 1 : toute suite bornée admet une limite.

Proposition n° 2 : Il existe deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} (v_n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} (u_n) \times (v_n) = -\infty$$

Pour les deux propositions suivantes, on considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{-2}{u_n}$

Proposition n° 3 : si (u_n) converge vers un réel ℓ, alors (v_n) converge vers le réel $\dfrac{-2}{\ell}$

Proposition n° 4 : si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.

Tournez svp !

EXERCICE 5 **3,5 pts**

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par : $\quad u_n = \dfrac{4n-1}{n+1}$

1. Déterminer le sens de variation de cette suite.

2. Démontrer que, pour tout entier n, on a : $\quad u_n \in [-1;4[$

EXERCICE 6 **8 pts**

La population d'une espèce en voie de disparition est surveillée de près dans une réserve naturelle.

Les conditions climatiques ainsi que le braconnage font que cette population diminue de 10 % chaque année.

Afin de compenser ces pertes, on réintroduit dans la réserve 100 individus à la fin de chaque année.

On souhaite étudier l'évolution de l'effectif de cette population au cours du temps. Pour cela, on modélise l'effectif de la population de l'espèce par la suite (u_n) où u_n représente l'effectif de la population au début de l'année $2020+n$.

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.

Au début de l'année 2020, la population étudiée compte 2 000 individus, ainsi $u_0 = 2\,000$.

1. Justifier que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence : $u_{n+1} = 0,9u_n + 100$.

2. Calculer u_1 puis u_2.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $1\,000 < u_{n+1} \leqslant u_n$.

4. Que peut-on en déduire sur les variations de la suite (u_n) ?

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1\,000$.

   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0,9$.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1\,000\left(1+0,9^n\right)$.

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).
   En donner une interprétation dans le contexte de cet exercice.

6. On souhaite déterminer le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous d'un certain seuil S (avec $S > 1\,000$).

Dans le programme Python ci-contre, la variable n désigne le nombre d'années écoulées depuis 2020, la variable u désigne l'effectif de la population.
Recopier et compléter ce programme afin qu'il retourne le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous du seuil S.

```
def population(S) :
  n=0
  u=2000

  while ......:
    u= ...
    n = ...
  return ...
```