

La cinquième planète était très curieuse. C'était la plus petite de toutes. Il y avait là juste assez de place pour loger un réverbère et un allumeur de réverbères. Le petit prince ne parvenait pas à s'expliquer à quoi pouvaient servir, quelque part dans le ciel, sur une planète sans maison, ni population, un réverbère et un allumeur de réverbères. Cependant il se dit en lui-même:

- Peut-être bien que cette homme est absurde. Cependant il est moins absurde que le roi, que le vaniteux, que le businessman et que le buveur. Au moins son travail a-t-il un sens. Quand il allume son réverbère, c'est comme s'il faisait naître une étoile de plus, ou une fleur. Quand il éteint son réverbère ça endort la fleur ou l'étoile. C'est une occupation très jolie. C'est véritablement utile puisque c'est joli.

Lorsqu'il aborda la planète il salua respectueusement l'allumeur :

-Bonjour. Pourquoi viens-tu d'éteindre ton réverbère ?

-C'est la consigne, répondit l'allumeur.

Bonjour.

-Qu'est-ce la consigne ?

-C'est d'éteindre mon réverbère. Bonsoir.

Et il le ralluma.

-Mais pourquoi viens-tu de rallumer ?

-C'est la consigne, répondit l'allumeur.

-Je ne comprends pas, dit le petit prince.

-Il n'y a rien à comprendre, dit l'allumeur. La consigne c'est la consigne. Bonjour.

Et il éteignit son réverbère.



Chaque jour un allumeur de réverbère se demande s'il va allumer ou éteindre son réverbère. S'il est allumé, il l'éteint dans 30% des cas. S'il est éteint, il l'allume une fois sur deux. Le premier jour le réverbère est allumé.

On note  $P_n$  la probabilité que le réverbère soit allumé le  $n$ ème jour.

- 1) Donner  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$
- 2) Justifier que  $P_{n+1} = 0,2 P_n + 0,5$
- 3) Soit la suite  $(U_n)$  telle que  $U_n = P_n - 0,625$ 
  - a) Montrer que  $(U_n)$  est géométrique
  - b) Trouver  $U_n$  puis  $P_n$  en fonction de  $n$
  - c) Etudier les variations de  $P_n$
- 4) Si l'allumeur de réverbère continue éternellement son travail, le réverbère finira-t'il par être plus souvent allumé ou éteint ? (justifier le résultat)
- 5) Au bout de combien de jours la probabilité que le réverbère soit allumé sera inférieure à 63 % ?