EXERCICE 1 Des jouets pour Noël !

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation. Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée.

Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :
- 92 % des jouets sont sans défaut de finition ;
- parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95 % réussissent le test de solidité ;
- 2 % des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :
- F l'évènement : « le jouet est sans défaut de finition » ;
- S l'évènement : « le jouet réussit le test de solidité ».

1. **a.** Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités.

b. Démontrer que $p_{\overline{F}}\left(\overline{S}\right) = \frac{1}{4}$.

c. Construire un arbre pondéré correspondant à cette situation.

2. **a.** Démontrer que $p(S) = 0,934$.

b. Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition. (On donnera le résultat arrondi au millième,)

3. Étude d'une variable aléatoire B.
Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 10 €, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont mis au rebut, les autres jouets rapportent un bénéfice de 5 €.
On désigne par B la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire B.

b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire B. Comment interpréter concrètement cette valeur ?

EXERCICE 2

Questions liminaires :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Montrer que $(u^2)' = 2uu'$

⟶ *(facultatif) Montrer plus généralement que :* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (u^n)' = nu'u^{n-1}$

Le problème :

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\left(\ln x\right)^2}{x}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite en 0 de la fonction f et interpréter graphiquement le résultat.

2. **a.** Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) = 4\left(\dfrac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2$

b. En déduire que l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

3. **a.** Etudier les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

b. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur $]0\,;\,+\infty[$ et donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.