Partie A

On admet que, dès que le joueur achève une partie, la plateforme lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant :

— si le joueur achève une partie de type A, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type A avec une probabilité de $0,8$;

— si le joueur achève une partie de type B, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type B avec une probabilité de $0,7$.

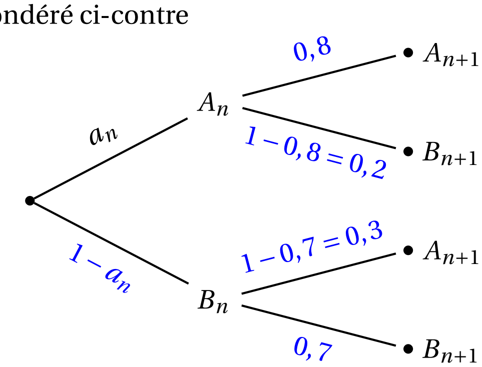
Pour une entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note A_n et B_n les évènements :

A_n : « la n-ième partie est une partie de type A. »

B_n : « la n-ième partie est une partie de type B. »

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n.

1. a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre



b. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$P\left(A_{n+1}\right) = P_{A_n}\left(A_n \cap A_{n+1}\right) + P_{B_n}\left(B_n \cap A_{n+1}\right) = 0,8a_n + 0,3\left(1-a_n\right) = 0,5a_n + 0,3$ donc

$$\boxed{a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3}$$

Partie B

Dans la suite de l'exercice, on note a la probabilité que le joueur joue au jeu A lors de sa première partie, où a est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$. La suite (a_n) est donc définie par : $a_1 = a$, et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$.

1. *Étude d'un cas particulier.* Dans cette question, on suppose que $a = 0,5$.

a. Montrons par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant a_n \leqslant 0,6$:

- Initialisation : $a_1 = a = 0,5$ donc $0 \leqslant a_1 \leqslant 0,6$
- Hérédité : on suppose $0 \leqslant a_n \leqslant 0,6$ pour une valeur quelconque de $n \geqslant 1$.
  Alors : $0 \leqslant 0,5 \times a_n \leqslant 0,5 \times 0,6$ donc $0 \leqslant 0,5a_n \leqslant 0,3$ d'où, en ajoutant 0,3 :
  $0,3 \leqslant 0,3 + 0,5a_n \leqslant 0,6$ et par conséquent : $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant 0,6$.
  La propriété est vraie au rang $n+1$.

La propriété est vraie au rang 1 et, si elle est vraie à un rang n quelconque elle est vraie au rang suivant $n+1$: d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

b. Pour tout $n \geqslant 1$, $a_{n+1} - a_n = 0,5a_n + 0,3 - a_n = -0,5a_n + 0,3$.

Or, d'après la question précédente, on a :

$0 \leqslant a_n \leqslant 0,6 \Rightarrow 0 \leqslant 0,5a_n \leqslant 0,3 \Rightarrow -0,3 \leqslant -0,5a_n \leqslant 0 \Rightarrow 0 \leqslant -0,5a_n + 0,3 \leqslant 0,3$ donc $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$.

La suite est donc croissante.

c. On admet que la suite est convergente vers une limite ℓ.

$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$; $\lim_{n\to+\infty} (0,5a_n + 0,3) = 0,5\ell + 0,3$.
Par unicité de la limite, on en déduit que ℓ est solution de l'équation : $0,5\ell + 0,3 = \ell$

donc $0,3 = 0,5\ell$ qui donne $\boxed{\ell = 0,6}$.
La suite (a_n) converge vers 0,6.

2. *Étude du cas général.* Dans cette question, le réel a appartient à l'intervalle $[0 ; 1]$.
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = a_n - 0,6$.

a. Pour tout n, $u_{n+1} = a_{n+1} - 0,6 = 0,5a_n + 0,3 - 0,6 = 0,5a_n - 0,3 = 0,5(a_n - 0,6) = 0,5u_n$ donc $\boxed{u_{n+1} = 0,5u_n}$.
La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $u_1 = a_1 - 0,6 = a - 0,6$.

b. Puisque (u_n) est géométrique, $u_n = u_1 q^{n-1} = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1}$ $(n \geqslant 1)$.
Comme $u_n = a_n - 0,6$, on a : $a_n = u_n + 0,6 = \boxed{a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6}$.

c. $-1 < 0,5 < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} 0,5^{n-1} = 0$ d'où, par produit et par somme, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0,6}$.

Cette limite ne dépend pas de la valeur de a.

d. Sur le long terme, la probabilité que le joueur fasse une partie de type A est 0,6 et donc celle qu'il fasse une partie de type B est 0,4. Le joueur verra plus souvent la publicité insérée dans les jeux de type A.