Une plateforme informatique propose deux types de jeux vidéo : un jeu de type A,un de type B.

Partie A

On admet que, dès que le joueur achève une partie, la plateforme lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant :

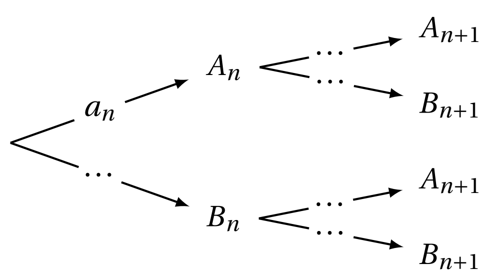
— si le joueur achève une partie de type A, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type A avec une probabilité de $0,8$;

— si le joueur achève une partie de type B, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type B avec une probabilité de $0,7$.

Pour une entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note A_n et B_n les évènements :
A_n : «la n-ième partie est une partie de type A.»
B_n : «la n-ième partie est une partie de type B.»
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n.

1. Compléter l'arbre pondéré ci-contre **2 pts**

2. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :
$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$ **3 pts**



Partie B

Dans la suite de l'exercice, on note a la probabilité que le joueur joue au jeu A lors de sa première partie, où a est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$. La suite (a_n) est donc définie par : $a_1 = a$, et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$.

1. *Étude d'un cas particulier.*
Dans cette question, on suppose que $a = 0,5$.

a. Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant a_n \leqslant 0,6$. **3 pts**

b. Montrer que la suite (a_n) est croissante. **2 pts**

c. On admet que la suite (a_n) converge vers un réel ℓ.
Justifier que ℓ est solution de l'équation $\ell = 0,5\ell + 0.3$.
En déduire la valeur de ℓ. **2 pts**

2. *Étude du cas général.*
Dans cette question, le réel a appartient à l'intervalle $[0 ; 1]$.
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = a_n - 0,6$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. **3 pts**

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6$. **2 pts**

c. Déterminer la limite de la suite (a_n). Cette limite dépend-elle de la valeur de a? **2 pts**

d. La plateforme diffuse une publicité insérée en début des parties de type A et une autre insérée en début des parties de type B. Quelle devrait-être la publicité la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéo? **1 pt**