Corrigé TvG n° 2

Partie A Etude d'une fonction auxiliaire : $g(x) = e^x + x + 1$.

1.
- $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to+\infty}(x+1) & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(e^x) & = & +\infty \end{array}\right\} \underset{\text{somme}}{\overset{\text{par}}{\Rightarrow}} \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

- $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) & = & -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x) & = & 0 \end{array}\right\} \underset{\text{somme}}{\overset{\text{par}}{\Rightarrow}} \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

- g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
  $\forall x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = e^x + 1$
  Donc $\forall x \in \mathbb{R}$: $g'(x) > 0$ donc g est strict.croissante sur $\mathbb{R}$.

2. g est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$
   L'intervalle image de $\mathbb{R}$ par g est $\mathbb{R}$.
   On a : $0 \in \mathbb{R}$ donc, d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.
3. Par dichotomie, on obtient à la calculatrice : $\alpha \approx -1,27$.
4. On en déduit, d'après les variations de g, le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x + 1}$

1. $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x) & = & 0 \quad \text{(croissance comparée)} \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x + 1) & = & 1 \end{array}\right\} \underset{\text{quotient}}{\overset{\text{par}}{\Rightarrow}} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

   Donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x\left(1 + \dfrac{1}{e^x}\right)} = \dfrac{x}{1 + \dfrac{1}{e^x}}$

   $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to+\infty} x & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{e^x}\right) & = & 1 \end{array}\right\} \underset{\text{quotient}}{\overset{\text{par}}{\Rightarrow}} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient **défini sur** $\mathbb{R}$ de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

   $\forall x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{[1 \times e^x + xe^x](e^x + 1) - e^x \times xe^x]}{(e^x + 1)^2} = \dfrac{e^{2x} + e^x + xe^{2x} + xe^x - xe^{2x}}{(e^x + 1)^2}$

   D'où : $f'x) = \dfrac{e^{2x} + e^x + xe^x}{(e^x + 1)^2} = \dfrac{e^x(e^x + 1 + x)}{(e^x + 1)^2} = \dfrac{g(x)e^x}{(e^x + 1)^2}$

   Or, $\dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4. $f(\alpha) = \dfrac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha + 1}$

   Or $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^\alpha + \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow e^\alpha + 1 = -\alpha$

   D'où $f(\alpha) = \dfrac{\alpha e^\alpha}{-\alpha} = -e^\alpha$

   Or $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^\alpha + \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow e^\alpha = -\alpha - 1$

   D'où $f(\alpha) = -e^\alpha = \alpha + 1$

5.
- Equation de T : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ soit : $y = \dfrac{1}{2}x$.
- Pour étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et T, il suffit d'étudier le signe de $f(x) - \dfrac{1}{2}x$.
  $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - \dfrac{1}{2}x = \dfrac{xe^x}{e^x + 1} - \dfrac{x}{2} = \dfrac{2xe^x - x(e^x + 1)}{2(e^x + 1)} = \dfrac{xe^x - x}{2(e^x + 1)} = \dfrac{x(e^x - 1)}{2(e^x + 1)}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$e^x - 1$		$-$	0	$+$	
$2(e^x + 1)$		$+$		$+$	
$f(x) - \frac{1}{2}x$		$+$	0	$+$	

6. Donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de T sur $\mathbb{R}$.