Corrigé Dernier DS

EXERCICE 1

Partie A : Étude d'une fonction

1. (a) De $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, on conclut par produit de limites que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln = +\infty$ puis par somme que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   (b) On sait que $\lim\limits_{x\to0} x\ln x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -1$.
2. f est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que produit et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.
   $\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} = \ln x + 1.$
   On a donc $f'(x) > 0 \iff \ln x + 1 > 0 \iff \ln x > -1 \iff x > \mathrm{e}^{-1}$ (par croissance de la fonction exponentielle). On peut donc en déduire que f est croissante sur $\left]\mathrm{e}^{-1}\ ;\ +\infty\right[$.
   On a $f\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = \mathrm{e}^{-1}\ln\left(\mathrm{e}^{-1}\right) - 1 = -\mathrm{e}^{-1} - 1$. On a donc le tableau de variations de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$ suivant :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ -1	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-1}-1$	$\nearrow$	$+\infty$

3. • Sur $\left]0\ ;\ \mathrm{e}^{-1}\right[$, $f(x) \leqslant -1 < 0$. l'équation n'a pas de solution sur cet intervalle.
   • Sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{-1}\ ;\ +\infty\right[$, la fonction f est continue car dérivable et strictement monotone croissante. L'intervalle image de $\left[\mathrm{e}^{-1}\ ;\ +\infty\right[$ par f est $\left[-\mathrm{e}^{-1}-1\ ;\ +\infty\right[$ qui contient 0.
   Donc, d'après le théo. de la bijection, il existe un réel unique α de l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{-1}\ ;\ +\infty\right[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
4. D'après le tableau de variation de f, on obtient :
   — sur $]0\ ;\ \alpha[,\ f(x) < 0$;
   — $f(\alpha) = 0$;
   — sur $]\alpha\ ;\ +\infty[,\ f(x) > 0$.
5. On a $f(\alpha) = 0 \iff \alpha\ln\alpha - 1 = 0 \iff \alpha\ln\alpha = 1 \iff \ln\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$ (car $\alpha \neq 0$).

Partie B : Calcul d'une intégrale

1. On sait que sur l'intervalle $[\alpha\ ;\ 4]$ la fonction f est positive, que $\alpha < 4$, donc l'intégrale est (en unité d'aire) l'aire de la surface hachurée limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 4$.
2. (a) si $\alpha \leqslant x \leqslant 4$ alors $f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(4)$ (car f croissante sur $[\alpha;4]$)
   Or $f(\alpha) = 0$ et $f(4) = 4\ln 4 - 1 = 4\ln 2^2 - 1 = 8\ln 2 - 1$
   donc on a bien : $\alpha \leqslant x \leqslant 4 \Rightarrow 0 \leqslant f(x) \leqslant 8\ln 2 - 1$
   (b) D'où par conservation de l'ordre par intégration sur un intervalle :
   $$\int_\alpha^4 (0)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_\alpha^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_\alpha^4 (8\ln 2 - 1)\,\mathrm{d}x$$
   $$\boxed{0 \leqslant \int_\alpha^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (8\ln 2 - 1)(4-\alpha)}$$
3. Posons $\left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & x \\ v(x) & = & \ln x \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & \dfrac{x^2}{2} \\ v'(x) & = & \dfrac{1}{x} \end{array}\right.$
   Les fonctions u et v sont continues sur $[\alpha\ ;\ 4]$ et de dérivées continues sur cet intervalle , on peut donc faire une intégration par parties :
   $$J = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_\alpha^4 - \int_\alpha^4 \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_\alpha^4 - \int_\alpha^4 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_\alpha^4$$
   $$J = 8\ln 4 - 4 - \left(\frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha - \frac{\alpha^2}{4}\right) = 8\ln 4 - 4 + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha.$$
4. $I = \displaystyle\int_\alpha^4 (x\ln x - 1)\mathrm{d}x = \int_\alpha^4 x\ln x\mathrm{d}x - \int_\alpha^4 1\mathrm{d}x = J - [x]_\alpha^4 = 8\ln 4 - 4 + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha - 4 + \alpha.$
   On a vu que $\ln\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$, donc :
   $$I = 8\ln 4 - 4 + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{2\alpha} - 4 + \alpha = 8\ln 4 - 4 + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha}{2} - 4 + \alpha = 8\ln 4 - 8 + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha}{2}$$
   $$I = 8\ln 2^2 - 8 + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha}{2} = 16\ln 2 - 8 + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha}{2}$$

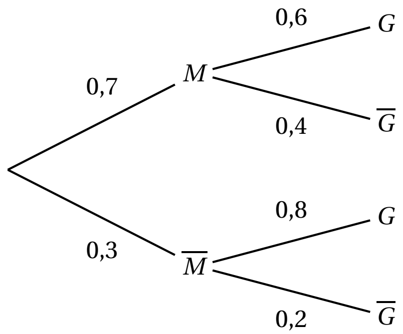
EXERCICE 2

1. (a) On a $p(M) = 0,7$, donc $p\left(\overline{M}\right) = 1 - 0,7 = 0,3$.

   Or $p\left(\overline{M} \cap \overline{G}\right) = 0,06$ donc

   $p\left(\overline{M}\right) \times p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right) = 0,06 \iff 0,3 \times p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right) = 0,06 \iff p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right) = 0,2$.

   (b) On complète l'arbre pondéré :



   (c) La probabilité de l'évènement « le client visite la grotte et ne visite pas le musée » est : $p\left(\overline{M} \cap G\right) = p\left(\overline{M}\right) \times p_{\overline{M}}(M) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$.

   (d) On a de même $p(M \cap G) = p(M) \times p_M(G) = 0,7 \times 0,6 = 0,42$.

   D'après la loi des probabilités totales (M et $\overline{M}$ formant une partition de l'univers)

   $p(G) = p(M \cap G) + p\left(\overline{M} \cap G\right) = 0,42 + 0,24 = 0,66$.

2. Le responsable de l'hôtel affirme que parmi les clients qui visitent la grotte, plus de la moitié visitent également le musée.

   On calcule $p_G(M) = \dfrac{p(G \cap M}{p(G)} = \dfrac{p(M \cap G}{p(G)} = \dfrac{0,42}{0,66} = \dfrac{42}{66} = \dfrac{21}{33} = \dfrac{7}{11} \approx 0,64 > 0,5$.

   L'affirmation est exacte.

3. (a) On a le tableau de probabilités suivant :

évènement	$M \cap G$	$M \cap \overline{G}$	$\overline{M} \cap G$	$\overline{M} \cap \overline{G}$
probabilité	0,42	0,28	0,24	0,06
dépense	17	12	5	0

   (b) D'après le tableau précédent :

   $E(T) = 17 \times 0,42 + 12 \times 0,28 + 5 \times 0,24 + 0 \times 0,06 = 7,14 + 3,36 + 1,2 = 11,7$.

   Ceci signifie que sur un grand nombre de visiteurs la dépense moyenne par visiteur est égale à 11,70 €.

   (c) Soit x le nombre minimum de visiteurs , x doit vérifier :

   $11,7 \times x > 700 \iff x > \dfrac{700}{11,7}$. Or $\dfrac{700}{11,7} \approx 59,8$.

   Il faut donc qu'il y ait au moins 60 visiteurs.

4. Soit g le prix à payer pour visiter la grotte ; le tableau de probabilités devient :

évènement	$M \cap G$	$M \cap \overline{G}$	$\overline{M} \cap G$	$\overline{M} \cap \overline{G}$
probabilité	0,42	0,28	0,24	0,06
dépense	12 + g	12	g	0

   L'espérance devient :

   $E = 0,42(12+g) + 12 \times 0,28 + 0,24 \times g + 0 \times 0,06 = 5,04 + 0,42g + 3,36 + 0,24g = 8,4 + 0,66g$.

   Le responsable veut que :

   $8,4 + 0,66g = 15 \iff 0,66g = 6,6 \iff g = 10$.

   Le prix d'entrée à la grotte doit passer à 10 euros.

5. Le nombre de visiteurs étant suffisamment grand pour que le tirage puisse être considéré avec remise, chaque visiteur a donc en moyenne une probabilité de 0,66 de visiter la grotte.

   La variable aléatoire G égale au nombre de visiteurs de la grotte suit donc une loi binomiale $\mathscr{B}(100\ ;\ 0,66)$.

   Il faut donc trouver $p(G \geqslant 75)$.

   La calculatrice donne $p(G \leqslant 74) \approx 0,9660$, donc

   $p(G \geqslant 75) = 1 - p(G \leqslant 74) \approx 1 - 0,9660 \approx 0,034$ au millième près.

EXERCICE 3

1. $tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

2. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x > 0 \qquad 4 \leqslant \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 6$

3. $\mathscr{S} = \left\{\dfrac{2\pi}{3} ; \dfrac{-2\pi}{3}\right\}$

4. $\mathscr{S} = \left[-\pi ; -\dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{6} ; \pi\right[$

5. $\dfrac{1}{\frac{\pi}{2} - 0} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{\pi}$

6. - $I = \left[-\mathrm{e}^{-x}\cos x + \mathrm{e}^{-x}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - I$
   - $2I = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} + 1$