EXERCICE 1 **8 points**

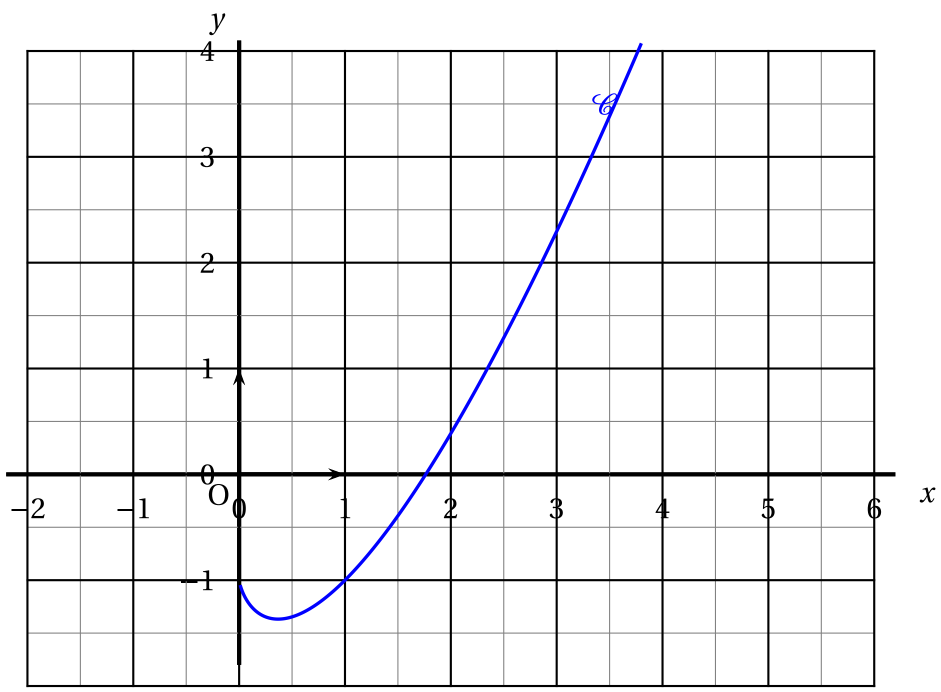
On considère la fonction f définie $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\ln x - 1$

Partie A : Étude d'une fonction

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$.
   En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0\,;\,+\infty[$.
4. En déduire le tableau de signe de $f(x)$ lorsque x appartient à $]0\,;\,+\infty[$.
5. Montrer que $\ln\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$.

Partie B : Calcul d'une intégrale

On donne ci-après la courbe $\mathscr{C}$, représentation graphique de la fonction f dans un repère.



On considère l'intégrale suivante : $I = \displaystyle\int_{\alpha}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$

1. Donner une interprétation graphique de l'intégrale I.
2. **a.** Justifier que, pour tout x appartenant à $[\alpha;4]$, on a : $0 \leqslant f(x) \leqslant 8\ln 2 - 1$.
   b. Quel encadrement de I peut-on en déduire ?
3. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_{\alpha}^{4} x\ln x\,\mathrm{d}x$
4. Montrer l'égalité : $I = \dfrac{\alpha^2}{4} + \dfrac{\alpha}{2} + 16\ln 2 - 8$.

EXERCICE 2 **7 points**

Une agence de voyage propose deux visites dans les environs d'un village touristique, celle d'un musée et celle d'une grotte.

Une étude a montré que 70 % des clients de l'agence visitent le musée. De plus, parmi les clients visitant le musée, 60 % visitent la grotte.

Cette étude montre aussi que 6 % des clients de l'agence ne font aucune visite.

On interroge au hasard un client de l'agence et on note :

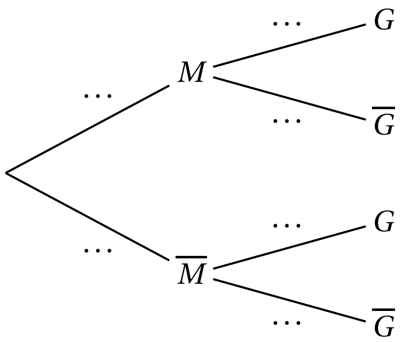
- M l'évènement : « le client visite le musée »
- G l'évènement : « le client visite la grotte »

Pour tout évènement E, on note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E, et $p(E)$ sa probabilité.

Ainsi, d'après l'énoncé, on a : $p\left(\overline{M} \cap \overline{G}\right) = 0,06$.

1. **a.** Vérifier que $p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right) = 0,2$, où $p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right)$ désigne la probabilité que le client interrogé ne visite pas la grotte sachant qu'il ne visite pas le musée.

   b. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre en indiquant sur chaque branche la probabilité associée.

   c. Quelle est la probabilité de l'évènement « le client visite la grotte et ne visite pas le musée » ?

   d. Montrer que $p(G) = 0,66$.

2. Le responsable de l'agence affirme que parmi les clients qui visitent la grotte, plus de la moitié visitent également le musée. Cette affirmation est-elle exacte ?

3. Les tarifs pour les visites sont les suivants :
   - visite du musée : 12 euros ;
   - visite de la grotte : 5 euros.

   On considère la variable aléatoire T qui modélise la somme dépensée par un client de l'agence pour ces visites.

   a. Déterminer la loi de probabilité de T, et présenter les résultats dans un tableau.

   b. Calculer l'espérance mathématique de T.

   c. Pour des questions de rentabilité, le responsable de l'agence estime que le montant moyen des recettes des visites doit être supérieur à 700 euros par jour.

   Déterminer le nombre moyen de clients par jour permettant d'atteindre cet objectif.

4. Pour augmenter les recettes, le responsable souhaite que l'espérance de la variable aléatoire modélisant la somme dépensée par un client de l'agence pour ces visites passe à 15 euros, sans modifier le prix de visite du musée qui demeure à 12 euros.

   Quel prix faut-il fixer pour la visite de la grotte afin d'atteindre cet objectif ? (On admet que l'augmentation du prix d'entrée de la grotte ne modifie pas la fréquentation des deux sites).

5. On choisit au hasard 100 clients de l'agence, en assimilant ce choix à un tirage avec remise.

   Quelle est la probabilité qu'au moins les trois quarts de ces clients aient visité la grotte à l'occasion de leur séjour ?

   On donnera une valeur du résultat à 10^{-3} près.

EXERCICE 3 **6 points**

Cet exercice est un QCM. Pour chaque question, entourez LA ou LES bonnes réponses.

Une réponse complète à une question rapportera un point, et toute réponse incorrecte enlèvera 0,3 *point.*

1. On considère la fonction tangente définie sur $\left]\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$.
Sa dérivée a pour expression :

A : $\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}$ **B :** $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ **C :** $\dfrac{-1}{\cos^2 x}$ **D :** $1+\tan^2 x$

2. On donne le tableau de variation d'une fonction continue sur $[-5;4]$:

x	-5		-1		2		4
$f(x)$	-2	↗	3	↘	2	↗	5

A : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x>0$ **B :** $2\leqslant\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 5$

C : $\displaystyle\int_{-5}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0$ **D :** $4\leqslant\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 6$

3. L'équation $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ admet pour solution dans l'intervalle $[-\pi;\pi[$:

A : $\left\{\dfrac{-\pi}{6};\dfrac{-5\pi}{6}\right\}$ **B :** $\left\{\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{4\pi}{3}\right\}$ **C :** $\left\{\dfrac{5\pi}{6};\dfrac{-5\pi}{6}\right\}$ **D :** $\left\{\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{-2\pi}{3}\right\}$

4. L'inéquation $\cos x\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ admet pour solution dans l'intervalle $[-\pi;\pi[$:

A : $\left[-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{6}\right]$ **B :** $\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right]$ **C :** $\left[-\pi;-\dfrac{\pi}{6}\right]\cup\left[\dfrac{\pi}{6};\pi\right[$ **D :** $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{11\pi}{6}\right]$

5. La valeur moyenne de la fonction cosinus sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ est égale à :

A : $\dfrac{\pi}{2}$ **B :** 1 **C :** $\dfrac{2}{\pi}$ **D :** $\dfrac{1}{2}$

6. Soit l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$. En réalisant une double intégration par parties, on obtient :

A : $I=\left[-\mathrm{e}^{-x}\cos x+\mathrm{e}^{-x}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-I$ **B :** $I=\left[-\mathrm{e}^{-x}\cos x+\mathrm{e}^{-x}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+I$

C : $2I=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}+1$ **D :** $2I=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}-1$