Barème sur 30 points

Exercice 1 — 2 points

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 4y = 5$
Déterminer la solution f de (E) vérifiant la condition initiale $f(3) = 5$.

Exercice 2 — 5 points

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I donné :

$f : x \longmapsto x\mathrm{e}^{5x^2+2}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

$g : x \longmapsto \dfrac{-2x^3 + 3x}{x^4 - 3x^2 + 5}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

$h : x \longmapsto \dfrac{-3x}{(5x^2 + 7)^2}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

$i : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ sur $\mathrm{I} =]0; +\infty[$.

$j : x \longmapsto \dfrac{1}{x \ln x}$ sur $\mathrm{I} =]0; 1[$.

Exercice 3 — 4 points

On considère l'équation différentielle (E) : $2y' + y = (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$

1. Déterminer deux réels a et b tels que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par
$$u(x) = (ax^2 + bx)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$$
soit solution de (E).
2. Résoudre l'équation homogène (E_0) : $2y' + y = 0$.
3. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 — 13 points

Partie A :

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. **a.** Combien peut-on former d'anagrammes du mot "LAINE" ?
   b. Combien de ces anagrammes commencent par une consonne ?
   c. Reprenez les deux questions précédentes avec le mot "BALEINE" ?
2. On constitue un groupe de 6 personnes choisies parmi 25 femmes et 32 hommes.
   a. Quelle est la probabilité de constituer un groupe ne comportant que des hommes ?
   b. Combien peut-on constituer de groupes ne comportant que des personnes de même sexe ?
   c. Combien peut-on constituer de groupes comportant au moins une femme et au moins un homme ?

3. Au jeu "Master Mind", un joueur doit disposer 5 pions dans 5 trous, les pions étant choisis parmi 8 couleurs, et le joueur dispose de 5 pions de chaque couleur.
   Combien de dispositions peut-on constituer ?
4. 15 personne se rencontrent. Chacune d'elle serre la main à chacune des autres. Quel est le nombre de poignées de main échangées ?
5. Une urne contient 4 boules rouges, 3 boules jaunes et 2 boules vertes.
   On tire au hasard trois boules simultanément.
   a. Déterminer le nombre de tirage possibles.
   b. Déterminer le nombre de tirages comportant trois boules de la même couleur.
   c. Déterminer le nombre de tirages comportant trois boules de deux couleurs différentes seulement.

Partie B :

1. Démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1;n]\!]$, on a : $n \times \binom{n-1}{p-1} = p \times \binom{n}{p}$
2. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $3 \times \binom{n}{4} = 14 \times \binom{n}{2}$.

EXERCICE 5 — 2 pts

Déterminer l'ensemble des solutions, définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$\text{(E)} : \; y'' + 2y' - 3 = 0$$

EXERCICE 6 — 4 points

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux de perte de chaleur d'un corps est proportionnel à la différence de température entre ce corps et l'environnement.
On place une tasse de thé bouillant dans une pièce où la température est constante, égale à 20° C.
On note $T(t)$ la température en °C du thé après t minutes. On a donc $T(0) = 100$
D'après la loi de refroidissement de Newton, on peut établir que T vérifie $T' = -\dfrac{\ln 2}{7}(T - 20)$

Au bout de combien de temps la température du thé sera-t-elle inférieure à 25°C ?

EXERCICE 7 — 0 point

On considère un ensemble E de $n+1$ entiers distincts choisis dans l'ensemble $\{1;2;3;\ldots;2n\}$
Démontrer que parmi les éléments de E, on peut toujours trouver deux entiers dont la somme est égale à $2n+1$.