EXERCICE 1 **7 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A(5 ; 0 ; −1), B(1 ; 4 ; −1), C(1 ; 0 ; 3), D(5 ; 4 ; 3) et E(10 ; 9 ; 8).

1. **a.** Soit R le milieu du segment [AB].
   Calculer les coordonnées du point R ainsi que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

   b. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan passant par le point R et dont $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal.
   Justifier qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_1$ est : $x - y - 1 = 0$.

   c. Démontrer que le point E appartient au plan $\mathscr{P}_1$ et que EA = EB .

2. On considère le plan $\mathscr{P}_2$ d'équation cartésienne $x - z - 2 = 0$.

   a. Justifier que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

   b. On note Δ la droite d'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

   Justifier qu'une représentation paramétrique de Δ est : $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 2+t \\ y & = & 1+t \\ z & = & t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$.

3. On considère le plan $\mathscr{P}_3$ d'équation cartésienne $y + z - 3 = 0$.
   Justifier que Δ et $\mathscr{P}_3$ sont sécants en un point Ω dont on déterminera les coordonnées.

Si S et T sont deux points distincts de l'espace, on rappelle que l'ensemble des points M de l'espace tels que MS = MT est un plan, appelé plan médiateur du segment [ST]. On admet que les plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont les plans médiateurs respectifs des segments [AB], [AC] et [AD].

4. **a.** Justifier que $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$.

   b. En déduire que les points A, B, C et D appartiennent à une même sphère dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 2 **8 pts**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x\ln(x) + 1$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 ainsi que sa limite en $+\infty$.

2. **a.** On admet que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on notera f' sa fonction dérivée.
   Montrer que pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = 1 + \ln(x)$

   b. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$. On y fera figurer la valeur exacte de l'extremum de f sur $]0\,;\,+\infty[$ et les limites.

   c. Justifier que pour tout $x \in]0\,;\,1[$, $f(x) \in]0\,;\,1[$.

3. **a.** Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

   b. Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.

   c. En déduire que pour tout réel x strictement positif, on a : $f(x) \geqslant x$.

4. On définit la suite (u_n) par son premier terme u_0 élément de l'intervalle $]0\,;\,1[$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

   a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < 1$.

   b. Déduire de la question 3. c. la croissance de la suite (u_n).

   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Tournez svp !

EXERCICE 3 **5 points**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse.

1. On considère l'équation (E) suivante $\ln x + \ln(x-10) = \ln 3 + \ln 7$ d'inconnue réelle x.

Affirmation 1 : L'équation (E) admet deux solutions sur $\mathbb{R}$.

2. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

— les points $A(0\ ;\ 1\ ;\ -1)$ et $B(-2\ ;\ 2\ ;\ -1)$.

— la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -2+t \\ y & = & 1+t \\ z & = & -1-t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

Affirmation 2 : Les droites (AB) et $\mathscr{D}$ sont coplanaires.

3. Soit une fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = (ax+b)\ln x \qquad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux paramètres réels.}$$

Soit $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère du plan.

Affirmation 3 : il existe un unique couple de paramètres $(a;b)$ tel que :

— $\mathscr{C}$ passe par le point $A(3;0)$.

— la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 2.