Term Spé math **DM n° 7 - Niveau 2** **pour jeudi 25 avril 2024**

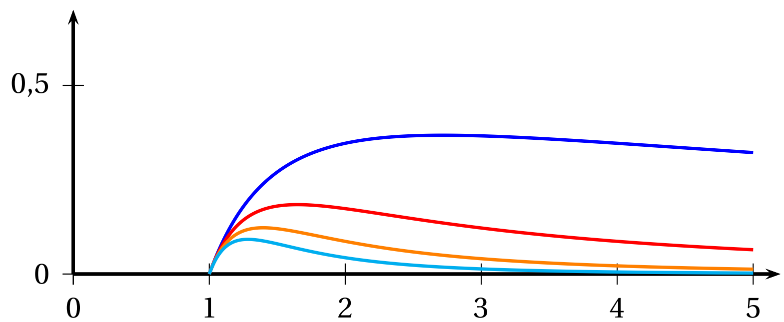
⟶ mini aide en ligne sur www.mathamia.fr

Exercice 1

On considère, pour tout entier $n > 0$, les fonctions f_n définies sur l'intervalle [1 ; 5J par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}.$$

Pour tout entier $n > 0$, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.
Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes $\mathscr{C}_n$ pour n appartenant à $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$.



1. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;5]$:

$$f_n'(x) = \frac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}.$$

2. Pour tout entier $n > 0$, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle $[1\,;5]$.
On note A_n le point de la courbe $\mathscr{C}_n$ ayant pour ordonnée ce maximum.
Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation

$$y = \frac{1}{\mathrm{e}}\ln(x).$$

3. **a.** Montrer que, pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;5]$:

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}.$$

b. Montrer que pour tout entier $n > 1$:

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right).$$

c. Pour tout entier $n > 0$, on s'intéresse à l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface sous la courbe f_n, c'est-à-dire l'aire du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$ et la courbe $\mathscr{C}_n$.
Déterminer la valeur limite de cette aire quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \left(\dfrac{1}{x} - 1\right)\ln x$.

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

Partie A

1. Rappeler, suivant les valeurs de x, le signe de $-\ln x$ sur $]0\,;\,+\infty[$
2. En déduire que : si $x > 1$ alors $1 - x - \ln x < 0$
   et que : si $x < 1$ alors $1 - x - \ln x > 0$
3. Dresser le tableau des variations de g sur $]0\,;\,+\infty[$, en précisant sa limite à l'infini.

Partie B

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \displaystyle\int_n^{n+1} g(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Donner une interprétation géométrique de U_n.
2. Justifier que $g(n+1) \leqslant g(x) \leqslant g(n)$ sur $[n; n+1]$.
3. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul on a : $g(n+1) \leqslant U_n \leqslant g(n)$.
4. En déduire le sens de variation de la suite (U_n).
5. La suite (U_n) est-elle convergente ?

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x + x\mathrm{e}}{x^2}$.

On pose $I_n = \displaystyle\int_{\mathrm{e}^n}^{\mathrm{e}^{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout entier naturel n.

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que : $I_n = \dfrac{n+1}{\mathrm{e}^n} - \dfrac{n+2}{\mathrm{e}^{n+1}} + \mathrm{e}$.
2. En déduire que la suite (I_n) converge vers e.