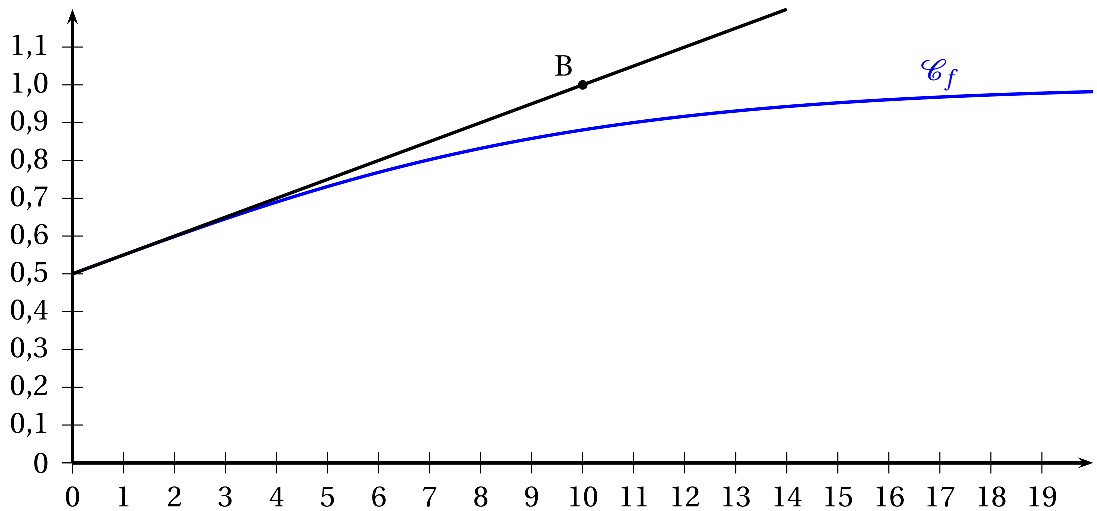
⟶ mini aide en ligne sur www.mathamia.fr

EXERCICE 1

Partie A

Soit a et b des nombres réels. On considère une fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{a}{1+\mathrm{e}^{-bx}}$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.
La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point A(0 ; 0,5). La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A passe par le point B(10 ; 1).



1. Justifier que $a = 1$.

   On obtient alors, pour tout réel $x \geqslant 0$: $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-bx}}$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

   Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$ $f'(x) = \dfrac{b\mathrm{e}^{-bx}}{\left(1+\mathrm{e}^{-bx}\right)^2}$.
3. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b.

Partie B

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$p(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}}.$$

Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1er janvier 2000.
Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.
Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2000 et $p(3,5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

1. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.
2. **a.** Déterminer le sens de variation de la fonction p sur $[0\ ;\ +\infty[$.

b. Calculer la limite de la fonction p en $+\infty$.

c. Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

3. On considère que le marché est saturé lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95 %. Déterminer, en résolvant une inéquation, l'année au cours de laquelle cela se produit.

4. On définit la proportion moyenne d'individus équipés entre 2008 et 2010 par

$$m = \frac{1}{2}\int_8^{10} p(x)\,\mathrm{d}x.$$

a. Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $\quad p(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{0,2x}}{1+\mathrm{e}^{0,2x}}$.

b. En déduire une primitive de la fonction p sur $[0\,;\,+\infty[$.

c. Déterminer la valeur exacte de m et son arrondi au centième.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $\quad f(x) = \dfrac{2\ln x}{x^2+x}$

1. Justifier que pour tout $x > 1$, on a : $\dfrac{\ln x}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\ln x}{x}$.

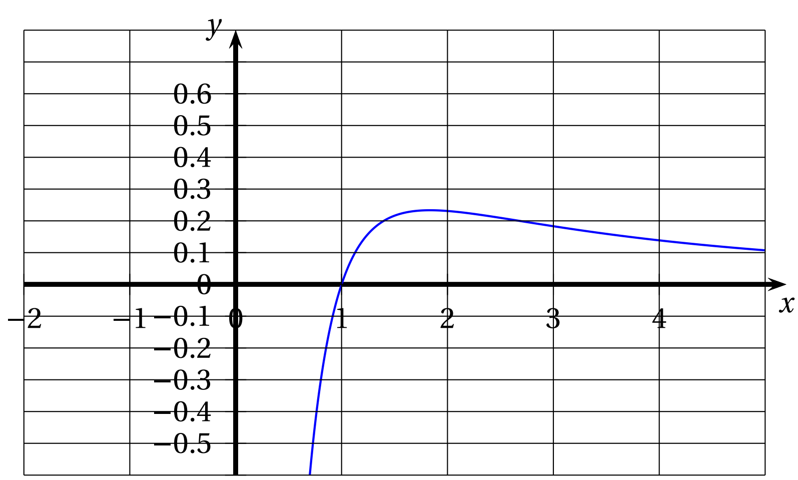
2. a. Calculer $\mathrm{I} = \displaystyle\int_2^4 \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \quad$ (*indication : une primitive de $u'\ u$ est ...*)

b. Soit $\mathrm{J} = \displaystyle\int_2^4 \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$. En procédant par intégration par parties, montrer que $\mathrm{J} = \dfrac{1}{4}$.

c. En déduire un encadrement de $\mathrm{K} = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. La figure ci-dessous représente la courbe représentative de f (unités graphiques : en abscisse 1 cm pour 1 unité, en ordonnées 4 cm pour 1 unité).

On considère l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ tels que : $\begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$ et on note $\mathscr{A}$ son aire.



À l'aide de l'encadrement trouvé au 2 c, donner un encadrement de $\mathscr{A}$ en cm^2.