∽ Corrigé DM n° 6 ∾

EXERCICE 1

Partie A :

1. M et N appartiennent à deux droites parallèles de la face FBCG; les droites (FB) et (GN) sont coplanaires.

   BCGF étant un carré on a donc $\overrightarrow{\text{FB}} = \overrightarrow{\text{GC}}$.

   Or M étant le milieu de [FB], on a $\overrightarrow{\text{MB}}\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{FB}}$ et comme $\overrightarrow{\text{CN}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{GC}}$, on a donc $\overrightarrow{\text{MB}} = \overrightarrow{\text{CN}} \iff$ MBNC est un parallélogramme dont les diagonales [BC] et [MN] ont le même milieu I.

2. Voir la section sur la figure.

   M et I appartiennent au plan (PMN) et à la face (BCGF), donc [MI] est l'intersection de la face (BCGF) du cube avec le plan.

   Dans cette face (BCGF) dans le triangle (BCF), on a (droite des milieux : $\overrightarrow{\text{MI}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{FC}}$.

   Or $\overrightarrow{\text{FC}} = \overrightarrow{\text{ED}}$, donc $\overrightarrow{\text{MI}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{ED}}$, donc les droites (MI) et (ED) sont parallèles, mais P $\in$ (ED), car P est le centre de la face (ADHE), donc la section du plan (PMN) avec la face (ADHE) est le segment [ED].

   Il en résulte aisément les intersections avec la face (BAEF) : le segment [ME] et l'intersection avec la face (BCDA) : le segment [ID].

   La section est donc le quadrilatère (MIDE).

Partie B :

1. Justifions que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (MNP).

   • Pour le repère choisi on a $\text{M}\left(1\,;\,0\,;\,\frac{1}{2}\right)$, $\text{N}\left(1\,;\,1\,;-\frac{1}{2}\right)$ et $\text{P}\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$. On en déduit les coordonnées des vecteurs :

   $\overrightarrow{\text{MN}}(0\,;\,1\,;\,-1)$, $\quad \overrightarrow{\text{MP}}\left(-1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$.

   Or $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{MN}} = 0+2-2 = 0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{MP}} = -1+1+0 = 0$.

   Donc le vecteur $\vec{n}$ orthogonal à deux vecteurs manifestement non colinéaires du plan MNP est un vecteur normal à ce plan.

   On sait qu'alors :

   $M(x\,;\,y\,;z) \in (\text{MNP}) \iff 1x+2y+2z+d = 0$.

   En particulier on a :

   $\text{P} \in (\text{MNP}) \iff 1\times 0+2\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+d = 0 \iff 1+1+d = 0 \iff d = -2$.

   Conclusion : $M(x\,;\,y\,;z) \in (\text{MNP}) \iff x+2y+2z-2 = 0$.

2. On sait que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (MNP). Les équations paramétriques de la droite (d) passant par G et orthogonale au plan (MNP) s'obtiennent en traduisant l'égalité vectorielle :

   Il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\text{G}M} = t\,\vec{n}$, d'où avec G(1 ; 1 ; 1) :

   $$\left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& 1t\\ y-1 &=& 2t\\ z-1 &=& 2t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t\\ y &=& 1+2t\\ z &=& 1+2t\end{array}\right.$$

3. Si $M(x\,;\,y\,y\,;\,z)$ appartient à la droite (d) et au plan (MN), ses coordonnées vérifient les équations paramétriques de la droite et l'équation cartésienne du plan, soit le système :

   $$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t\\ y &=& 1+2t\\ z &=& 1+2t\\ x+2y+2z-2 &=& 0\end{array}\right.$$

   D'où $1+t+2(1+2t)+2(1+2t)-2 = 0 \iff 3+9t = 0 \iff 9t = -3 \iff t = -\frac{1}{3}$, d'où remplaçant dans les équations paramétriques :

   $$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-\frac{1}{3}\\ y &=& 1-\frac{2}{3}\\ z &=& 1-\frac{2}{3}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{2}{3}\\ y &=& \frac{1}{3}\\ z &=& \frac{1}{3}\end{array}\right.$$

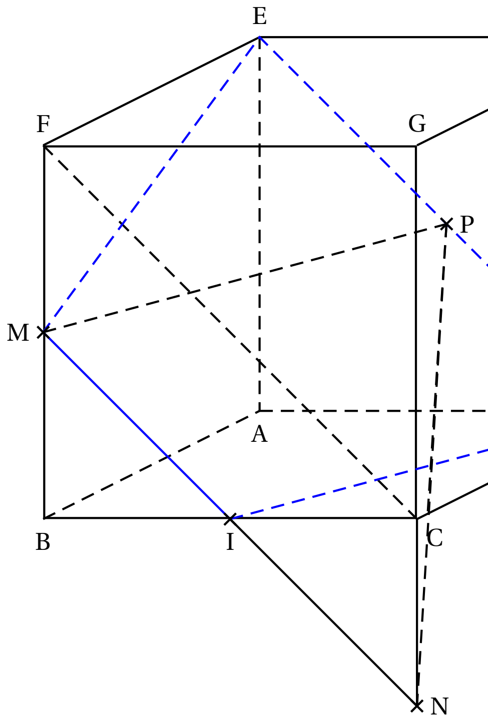
   On a donc $\text{K}\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

   On a $\text{GK}^2 = \left(1-\frac{2}{3}\right)^2+\left(1-\frac{1}{3}\right)^2+\left(1-\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9} = \frac{9}{9} = 1$, d'où GK = 1.

4. On a vu dans la partie A que la section du cube par le plan (PMN) est le quadrilatère MEDI, donc le plan (MEDI) est le plan (PMN).

   Dans la pyramide GMEDI la droite (d) contient G (question **2.**), est orthogonale au plan (MNP) ou (MEDI) (question **2.** et coupe le plan (MNP) en K (question **3.**). Donc [GK] est la hauteur de la pyramide dont le volume est :

   $$V_{(\text{GMEDI})} : \frac{1}{3}\mathscr{A}(\text{AEDI})\times\text{GK} = \frac{1}{3}\times\frac{9}{8}\times 1 = \frac{3}{8}\ \text{unité de volume.}$$



EXERCICE 2

a. Le vecteur $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}5\\6\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}_1$.

Le vecteur $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}_2$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles. En effet : $\dfrac{5}{1} \neq \dfrac{6}{-2}$. Donc $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

b. $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \iff \left\{\begin{array}{rcl}5x+6y+2z &=& 12\\ x-2y-2z &=& 0\end{array}\right.$ (S).

c. (S) $\iff \left\{\begin{array}{rcl}6y+2z &=& 12-5x\\ 2y+2z &=& x\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}6y+(x-2y) &=& 12-5x\\ 2z &=& x-2y\end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{rcl}4y &=& 12-6x\\ 2z &=& x-2y\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}y &=& 3-\dfrac{3}{2}x\\ 2z &=& x-(6-3x)\end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{rcl}y &=& 3-\dfrac{3}{2}x\\ z &=& 2x-3\end{array}\right.$

d. Posons $x = t$, $t \in \mathbb{R}$ quelconque. Le système devient :

$$\left\{\begin{array}{rcl}x &=& t\\ y &=& 3-\dfrac{3}{2}t\\ z &=& -3+2t\end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$$

On obtient ainsi une représentation paramétrique de la droite d'intersection des deux plans.