ൟ Corrigé DM n° 5 ൠ

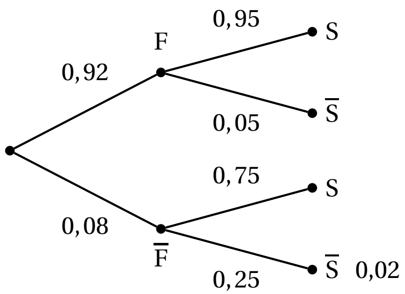
EXERCICE 1

1. (a) On a $p(\text{F}) = 0,92$; $p_{\text{F}}(\text{S}) = 0,95$; $p\left(\overline{\text{F}} \cap \overline{\text{S}}\right) = 0,02$.

   (b) $p(\text{F}) = 0,92 \Rightarrow p\left(\overline{F}\right) = 0,08$.

   $$p_{\overline{\text{F}}}\left(\overline{\text{S}}\right) = \frac{p\left(\overline{\text{F}} \cap \overline{\text{S}}\right)}{p\left(\overline{F}\right)} = \frac{0,02}{0,08} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

   (c) Arbre pondéré :



2. (a) F et $\overline{\text{F}}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on a :
   $p(\text{S}) = p(\text{S} \cap \text{F}) + p\left(\text{S} \cap \overline{\text{F}}\right) = 0,92 \times 0,95 + 0,08 \times 0,75 = 0,934.$

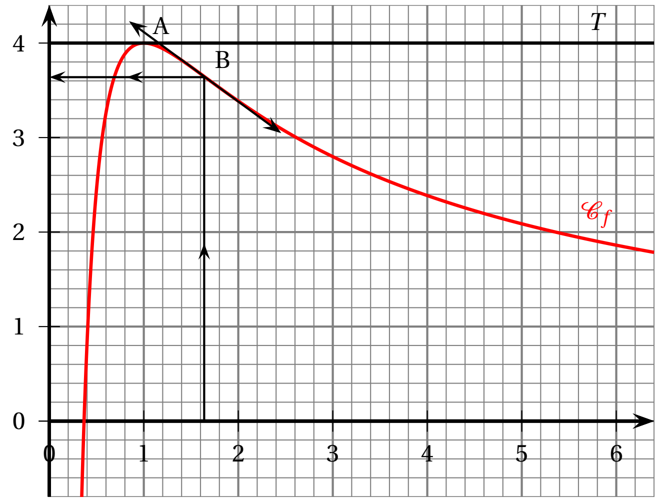
   (b) Il faut trouver la probabilité conditionnelle $p_{\text{S}}(\text{F})$
   $p_{\text{S}}(\text{F}) = \dfrac{p(\text{S} \cap \text{F})}{p(\text{S})} = \dfrac{0,874}{0,934} \approx 0,936$ à 0,001 près.

3. (a) Loi de probabilité de B :

évènement	$\text{F} \cap \text{S}$	$\overline{\text{F}} \cap \text{S}$	reste
probabilité	0,874	0,06	0,066
bénéfice : b €	10	5	0

   (b) On a $\text{E}(B) = 0,874 \times 10 + 0,06 \times 5 + 0,166 \times 0 = 8,74 + 0,30 = 9,04$ € (ce qui représente, sur un très grand nombre de jouets, le bénéfice moyen par jouet).

EXERCICE 2



1. A(1 ; 4) $\in \mathscr{C}_f$, donc $f(1) = 4$ et la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale T au point A(1 ; 4) ; le coefficient directeur de cette tangente en ce point est nul ou encore le nombre dérivé est nul : $f'(1) = 0$.

2. f est une fonction quotient de fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas et sur cet intervalle :
   $$f'(x) = \frac{\frac{b}{x} \times x - 1(a + b\ln x)}{x^2} = \frac{b - a - b\ln x}{x^2}.$$

   En utilisant les résultats du **1.** :
   $f(1) = \dfrac{a + b\ln 1}{1} = 4 \iff a = 4;$
   $f'(1) = \dfrac{b - 4 - b\ln 1}{1^2} = 0 \iff b - 4 = 0 \iff b = 4.$
   Conclusion : la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

   $$f(x) = \frac{4 + 4\ln x}{x}.$$

3. • $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, donc $\lim_{x\to 0^+} 4+4\ln x = -\infty$ donc par quotient $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$;

• On a $f(x) = \dfrac{4}{x} + 4\dfrac{\ln x}{x}$.

On a $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x} = 0$ et on sait que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, donc par somme :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

4. On a donc sur $]0~;~+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-4\ln x}{x^2}$ qui a pour signe celui de $-4\ln x$.

On sait que sur $]0~;~1[$, $\ln x < 0$, donc $f'(x) > 0$ sur $]0~;1[$;

Par contre sur $]1~;~+\infty[$, $\ln x > 0$, donc $f'(x) < 0$ sur $]1~;~+\infty[$;

$f'(1) = 0$, donc le point de coordonnées $(1~;4)$ est le maximum de la fonction sur $]0~;~+\infty[$.

La fonction f est donc croissante sur $]0;~1[$ de $-\infty$ à 4, puis décroissante sur $[1~;~+\infty[$ de 4 à 0 avec un maximum 4 pour $x = 1$.

5. (a) f'étant une fonction quotient de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas est dérivable et sur cet intervalle :

$$f''(x) = \frac{-4\times\frac{1}{x}\times x^2 - 2x\times(-4\ln x)}{x^4} = \frac{-4x+8x\ln x}{x^4} = \frac{-4+8\ln x}{x^3}.$$

(b) La courbe présente un point d'inflexion lorsque la dérivée seconde s'annule. Or :

$f''(x) = 0 \iff \dfrac{-4+8\ln x}{x^3} = 0 \iff -4+8\ln x = 0 \iff -1+2\ln x = 0 \iff$ $\ln x = \dfrac{1}{2} \iff x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \approx 1,649$ $\left(\text{ou } \sqrt{\mathrm{e}}\right)$.

L'ordonnée de ce point unique d'inflexion est $f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{4+4\times\frac{1}{2}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{6}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{6}{\sqrt{\mathrm{e}}} \approx 3,639$.

Ce point d'inflexion et la tangente en ce point sont indiqués sur la figure ci-dessus.

EXERCICE 3

1. Pour $n = 0$, $u_1 = u_{0+1} = \dfrac{3}{4}u_0 + \dfrac{1}{4}\times 0 + 1 = \dfrac{3}{4}\times 1 + 1 = \dfrac{7}{4}$.
Pour $n = 1$, $u_1 = u_{1+1} = \dfrac{3}{4}u_1 + \dfrac{1}{4}\times 1 + 1 = \dfrac{3}{4}\times\dfrac{7}{4} + \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{41}{16}$.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,562 5
5	3	3,421 875
6	4	4,316 406 25

2. (a) La formule à écrire dans la cellule B3 est : « = 3/4 * B2 + 1/4 * A2 +1 »
(b) La suite (u_n) semble croissante.

3. (a) Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

- **Initialisation**
Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $0 \leqslant 1 \leqslant 1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité**
On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie, c'est-à-dire : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ (hypothèse de récurrence).

$$\begin{aligned} n \leqslant u_n \leqslant n+1 &\iff \frac{3}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n \leqslant \frac{3}{4}(n+1)\\ &\iff \frac{3}{4}n + \frac{1}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leqslant \frac{3}{4}(n+1) + \frac{1}{4}n\\ &\iff n \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leqslant n + \frac{3}{4}\\ &\iff n+1 \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \leqslant n + \frac{3}{4} + 1\\ &\iff n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n + \frac{7}{4}\end{aligned}$$

donc $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$.
On a démontré que la propriété était vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**
La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

(b) D'après la question précédente :

- Pour tout n, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ donc $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$ donc $n \leqslant u_n \leqslant n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$ d'où on tire $u_n \leqslant u_{n+1}$ ce qui démontre que la suite (u_n) est croissante.
- Pour tout n, $n \leqslant u_n$; or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(c) Pour tout n, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ donc pour tout $n > 0$, on a : $1 \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant \dfrac{n+1}{n}$

c'est-à-dire : $1 \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$

Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1$.

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$

(a) Pour tout n, $v_n = u_n - n$ donc $u_n = v_n + n$.

$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}n + 1 - n - 1 = \dfrac{3}{4}(v_n + n) - \dfrac{3}{4}n = \dfrac{3}{4}v_n + \dfrac{3}{4}n - \dfrac{3}{4}n = \dfrac{3}{4}v_n$

$v_0 = u_0 - 0 = 1$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

(b) On en déduit que, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

Comme $u_n = v_n + n$, on a $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + n$.