⟶ mini aide en ligne sur www.mathamia.fr

EXERCICE 1 Des jouets pour Noël!

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation. Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée.
Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

- 92 % des jouets sont sans défaut de finition;
- parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95 % réussissent le test de solidité;
- 2 % des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- F l'évènement : « le jouet est sans défaut de finition »;
- S l'évènement : « le jouet réussit le test de solidité ».

1. **a.** Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités.

   b. Démontrer que $p_{\overline{\mathrm{F}}}\left(\overline{\mathrm{S}}\right) = \dfrac{1}{4}$.

   c. Construire un arbre pondéré correspondant à cette situation.

2. **a.** Démontrer que $p(\mathrm{S}) = 0,934$.

   b. Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition. (On donnera le résultat arrondi au millième,)

3. Étude d'une variable aléatoire B.
   Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 10 €, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont mis au rebut, les autres jouets rapportent un bénéfice de 5 €.
   On désigne par B la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.

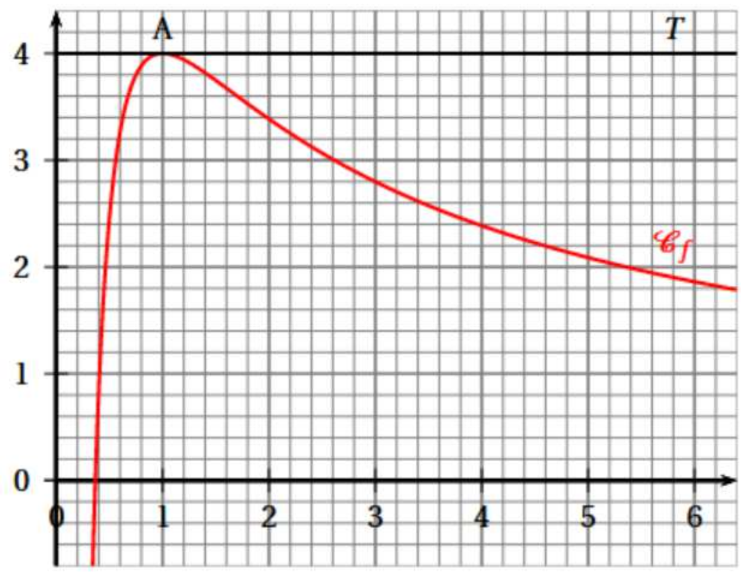
   a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire B.

   b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire B. Comment interpréter concrètement cette valeur?

EXERCICE 2

Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f, deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale T au point A(1 ; 4).



1. Préciser les valeurs $f(1)$ et $f'(1)$.

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

2. Déterminer les valeurs des réels a et b.

3. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

4. Déterminer le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

5. **a.** Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a : $f''(x) = \dfrac{-4 + 8\ln x}{x^3}$.

b. Dresser le tableau de signe de $f''(x)$ et en déduire que la courbe $\mathcal{C}_f$ possède un unique point d'inflexion B dont on précisera les coordonnées.

EXERCICE 3

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,5625
5	3	3,421875
6	4	4,31640625

2. **a.** Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B ?

b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

3. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n + 1$.

b. En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

c. Démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n,on a : $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + n$.