Corrigé DM n° 3

Exercice 1

On considère la suite (T_n) définie par : $T_0 = 180$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+1} = 0{,}955T_n + 0{,}9$

1. (a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n \geqslant 20$.

   Initialisation : $T_0 = 180 \geqslant 20$. L'initialisation est vérifiée.

   Hérédité : Supposons que $T_n \geqslant 0$, pour un entier n donné.

   Montrons que $T_{n+1} \geqslant 20$.

   $T_n \geqslant 20 \iff 0{,}955 \times T_n \geqslant 0{,}955 \times 20 \iff 0{,}955T_n \geqslant 19{,}1$
   $\iff 0{,}955T_n + 0{,}9 \geqslant 19{,}1 + 0{,}9 \iff 0{,}955T_n + 0{,}9 \geqslant 20.$

   Donc $T_{n+1} \geqslant 20$. L'hérédité est démontrée.

   Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et elle est héréditaire. Donc d'après le principe de récurrence, on a $T_n \geqslant 20$ pour tout entier n.

   (b) $$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+1} - T_n &= 0{,}955\ T_n + 0{,}9 - T_n\\ &= -0{,}045\ T_n + 0{,}9\\ &= -0{,}045\left(T_n - \frac{0{,}9}{0{,}045}\right)\\ &= -0{,}045(T_n - 20).\end{aligned}$$

   Or d'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n \geqslant 20$ donc $T_n - 20 \geqslant 0$.

   Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+1} - T_n \leqslant 0$.

   La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

2. On note $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = T_n - 20$.

   (a) $$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} &= T_{n+1} - 20\\ &= 0{,}955 \times T_n + 0{,}9 - 20\\ &= 0{,}955\ T_n - 19{,}1\\ &= 0{,}955\left(T_n - \frac{19{,}1}{0{,}955}\right)\\ &= 0{,}955(T_n - 20)\\ &= 0{,}955\ u_n.\end{aligned}$$

   Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 0{,}955u_n$ donc la suite (u_n) est géométrique de raison 0,955 et de premier terme $u_0 = T_0 - 20 = 160$.

   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times q^n = 160 \times 0{,}955^n$.

   De plus $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = T_n - 20$

   donc $T_n = u_n + 20 = 160 \times 0{,}955^n + 20$.

   (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}955^n = 0$ car $0{,}955 \in]-1\,;\,1[$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = 20$.

   (d) $$\begin{aligned}T_n \leqslant 120 &\iff 160 \times 0{,}955^n + 20 \leqslant 120\\ &\iff 160 \times 0{,}955^n \leqslant 120 - 20\\ &\iff 160 \times 0{,}955^n \leqslant 100\\ &\iff 0{,}955^n \leqslant \frac{100}{160}\\ &\iff 0{,}955^n \leqslant \frac{5}{8}.\end{aligned}$$

   À la calculatrice, on trouve $n \geqslant 11$.

3. (a) Lorsque le gâteau est sorti du four, il va céder son énergie (sa chaleur) à l'extérieur (environnement ambiant). Sa masse étant très faible par rapport à celle de l'extérieur, il va diminuer sa température pour atteindre celle de l'extérieur, soit 20° C.

   (b)

```
def temp(x) :
    T = 180
    n = 0
    while T > x :
        T=0.955*T+0.9
        n=n+1
    return n
```

   La fonction Python est un algorithme de seuil : on cherche à partir de quand, la température devient inférieure ou égale au seuil fixé (ici l'argument de la fonction *seuil()* qui est x). La valeur renvoyée sera le premier entier vérifiant $T_n \leqslant x$.

   temp(120) fournira le premier nombre entier n tel que $T_n \leqslant 120$, soit d'après la question précédente, $n = 11$. Dans le contexte de l'exercice, il faudra donc 11 minutes avant que la température du plat soit inférieure ou égale à 120° C

Exercice 2

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - \dfrac{1-e^x}{1+e^x} = \dfrac{1+e^x}{1+e^x} - \dfrac{1-e^x}{1+e^x} = \dfrac{2e^x}{1+e^x} = \dfrac{2e^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} = \dfrac{2}{1+\frac{1}{e^x}} = \dfrac{2}{1+e^{-x}}$

   Affirmation 1 : Vraie

2. $g(x) = \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{1}{2} \iff 2e^x = e^x + 1 \iff e^x = 1 \iff x = 0$

   Affirmation 2 : Vraie

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2xe^{-x} + x^2 \times -e^{-x} = \left(2x - x^2\right)e^{-x}$.

   L'équation d'une tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Pour que l'axe des abscisses soit tangent à $\mathscr{C}$, il faut que la courbe $\mathscr{C}$ admette une tangente d'équation $y = 0$ (équation de l'axe des abscisses), donc il faut que $f(a) = 0$ et $f'(a) = 0$. Sachant que $\forall a \in \mathbb{R},\ e^{-a} \neq 0$,

   $f(a) = 0 \iff a^2e^{-a} = 0 \iff a^2 = 0 \iff a = 0.$

   $f'(a) = 0 \iff (2a - a^2)e^{-a} = 0 \iff 2a - a^2 = 0 \iff a(2-a) = 0 \iff a = 0$ ou $a = 2$.

   Donc $a = 0$. Il n'existe donc qu'un seul point où l'axe des abscisses est tangent à $\mathscr{C}$.

   Affirmation 3 : Vraie

4. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{C}_h$ sa courbe représentative.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = \mathrm{e}^x \times \left(1 - x^2\right) + \mathrm{e}^x \times -2x = \mathrm{e}^x \left(1 - x^2 - 2x\right) = \left(-x^2 - 2x + 1\right)\ \mathrm{e}^x$.
La fonction h' est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $h''(x) = (-2x - 2)\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x \times \left(-x^2 - 2x + 1\right) = \mathrm{e}^x \left(-2x - 2 - x^2 - 2x + 1\right) = \left(-x^2 - 4x - 1\right)\mathrm{e}^x$
Si $\mathcal{C}_h$ admet des points d'inflexions, alors $h''(x)$ peut s'annuler et changer de signe. Or $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout réel x, donc étudions le signe de $-x^2 - 4x - 1$ sur $\mathbb{R}$.
$-x^2 - 4x - 1$ s'annule pour $x_1 = -2 - \sqrt{3}$ et pour $x_2 = -2 + \sqrt{3}$ car $\Delta = 12$.
Le trinôme du second degré s'annule donc deux fois et change donc aussi de signe.

Affirmation 4 : Fausse

5. $1 + \mathrm{e}^{2x} \geqslant 2\mathrm{e}^x \iff \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 1 \geqslant 0 \iff \left(\mathrm{e}^x - 1\right)^2 \geqslant 0$.
Cette dernière inégalité est vraie pour tout réel x.

Affirmation 5 : Vraie