Corrigé DM 2

Ex 1

Ⓐ $g(x) = x + 2 - e^x$ sur $[0\,;+\infty[$

① $\forall x \geqslant 0 \quad g'(x) = 1 - e^x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$1-e^x$		$+$	1	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

$\rightarrow$ donc sur $[0\,;+\infty[$

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	

② on trouve par tableaux de valeurs successifs $1{,}14 < \alpha < 1{,}15$

③

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Ⓑ ① a) $\forall x \in [0\,;+\infty[$

$$f'(x) = \frac{e^x(xe^x+1) - (e^x + xe^x)(e^x - 1)}{(xe^x+1)^2}$$

$$= \frac{xe^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x - xe^{2x} + xe^x}{(xe^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^x(2 - e^x + x)}{(xe^x+1)^2} = \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$$

b) $\forall x \geqslant 0$ on a $\dfrac{e^x}{(xe^x+1)^2} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	

② a) $g(\alpha) = 0 \iff \alpha + 2 - e^\alpha = 0 \iff e^\alpha = \alpha + 2$

$$f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1} = \frac{\alpha + 2 - 1}{\alpha(\alpha+2)+1} = \frac{\alpha+1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} = \frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2} = \frac{1}{\alpha+1}$$

b) $1{,}14 < \alpha < 1{,}15 \Rightarrow 2{,}14 < \alpha + 1 < 2{,}15 \Rightarrow \dfrac{1}{2{,}15} < \dfrac{1}{\alpha+1} < \dfrac{1}{2{,}14}$

$\Rightarrow 0{,}46 < f(\alpha) < 0{,}47$

③ Tangente T_0 : $y = f'(0)(x - 0)$ soit $y = x$

④ a) $\forall x \in [0\,;+\infty[\quad f(x) - x = \dfrac{e^x - 1}{xe^x + 1} - \dfrac{x(xe^x+1)}{xe^x+1} = \dfrac{e^x - 1 - x^2e^x - x}{xe^x+1}$

et $(x+1)u(x) = (x+1)(e^x - xe^x - 1) = \dots = e^x - 1 - x^2e^x - x$

donc $f(x) - x = \dfrac{(x+1)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x+1} = \dfrac{(x+1)u(x)}{xe^x+1}$

b) $\forall x \in [0\,;+\infty[\quad u'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x \rightarrow$ du signe de $-x$

x	0		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	
$u(x)$	0	$\searrow$	

donc $\forall x \in [0\,;+\infty[\quad u(x) \leqslant 0$

c) $\forall x \in [0\,;+\infty[\quad f(x) - x$ est du signe de $u(x)$ car $\dfrac{x+1}{xe^x+1} > 0$

donc $f(x) - x \leqslant 0 \rightarrow$ La courbe $\mathcal{C}$ est au-dessous de T sur $[0\,;+\infty[$