TG2 - Devoir de mathématiques n° 2 - pour mardi 17 oct 2023

$\longrightarrow$ mini aide en ligne sur www.mathamia.fr

EXERCICE 1 Problème d'analyse avec étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x\mathrm{e}^x + 1}$.

⋆ Partie A ⋆ ⋆ étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x + 2 - \mathrm{e}^x$.

1. Étudier le sens de variation de g sur $[0\,;\,+\infty[$..
2. On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0\,;\,+\infty[$. Déterminer à la calculatrice un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
3. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

⋆ Partie B ⋆ Étude de la fonction f

1. **a.** Montrer que, pour tout x appartenant à $[0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x g(x)}{(x\mathrm{e}^x + 1)^2}$.

   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. **a.** Établir que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha + 1}$.

   b. En utilisant l'encadrement de α établi dans la question **A.2.**, donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
4. **a.** Établir que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$,

   $$f(x) - x = \frac{(x+1)\,u(x)}{x\mathrm{e}^x + 1} \quad \text{avec } u(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - 1.$$

   b. Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. En déduire le signe de $u(x)$.

   c. Déduire des questions précédentes la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite (T).

EXERCICE 2 Deux méthodes pour conclure!

On considère un cube $ABCDEFGH$

On définit les points I et J par les égalités vectorielles suivantes : $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{GC}$

1. Dessiner un cube en perspective et placer les points I et J.

   L'objectif de cet exercice est de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ ne forment pas une base de l'espace.

2. **Méthode vectorielle**

   a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$.

   b. Conclure.

3. **Méthode analytique**

   a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ dans une base de l'espace que vous choisirez.

   b. Montrez que ces trois vecteurs sont coplanaires, et conclure.