# Corrigé DM n° 1

## Exercice 1

1. On cherche $a$ et $b$ tel que $\boxed{f(-2)=-3}$ et $\boxed{f'(-2)=0}$

   - $f(-2)=\dfrac{4-2a+b}{-1}=-4+2a-b$
   - $f$ est dérivable sur $D$ en tant que fonction rationnelle définie sur $D$ et

   $$\forall x\in D,\qquad f'(x)=\frac{(2x+a)(x+1)-(1)(x^2+ax+b)}{(x+1)^2}=\ldots=\frac{x^2+2x+a-b}{(x+1)^2}$$

   d'où $f'(-2)=a-b$

   - $\left\{\begin{array}{lcl} f(-2)&=&-3\\ f'(-2)&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} -4+2a-b&=&-3\\ a-b&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2a-b&=&1\\ a&=&b\end{array}\right.$

   $$\iff \left\{\begin{array}{lcl} 2a-a&=&1\\ a&=&b\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a&=&1\\ b&=&1\end{array}\right.$$

   - bilan : $\forall x\in D$, $\boxed{f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}}$

2. $\forall x\in D$, $\quad x+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{(x)(x+1)+1}{x+1}=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=f(x)$

3. $\forall x\in D$, $\boxed{f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}}$

   $\longrightarrow$ Voir expression de $f'(x)$ obtenue au 1. en remplaçant $a$ et $b$ par leur valeur)

   Tableau de variations de f :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+2x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(x+1)^2$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $-3$ | $\searrow$ | $\Vert$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | |

4. Equation de $T_1$ : $\quad y=f'(1)(x-1)+f(1)=\dfrac{3}{4}(x-1)+\dfrac{3}{2}\quad$ soit $\boxed{y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4}}$

## Exercice 2

1. $\forall x\in\mathbb{R},\qquad f(x)-(x+1)=\dfrac{1}{4}x^2+2-x-1=\dfrac{1}{4}x^2-x+1$

   Etudions le signe de ce trinôme : $\quad\Delta=1-4\times\dfrac{1}{4}\times 1=0$

   Il admet une racine double et le coef. de $x^2$ est positif

   d'où $f(x)-(x+1)\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ $\quad$ donc $f(x)\geqslant x+1$ sur $\mathbb{R}$

2. **a.** Voir courbe et constructions sur autre page

   **b.** $\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)\geqslant x+1$ donc $\forall n\in\mathbb{N},\quad f(u_n)\geqslant u_n+1$

   d'où $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}\geqslant u_n+1$

   **c.** $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}-u_n\geqslant 1>0$ donc la suite $u$ est croissante.

   **d.** Soit $P(n)$ la proposition : $\quad u_n\geqslant u_0+n$

   - $P(0)$ est vraie car : $\quad u_0\geqslant u_0+0$
   - Supposons que $\quad u_n\geqslant u_0+n\quad$ pour **un** entier $n$ donné.

     On a : $\quad u_{n+1}\geqslant u_n+1\quad$ (d'après **2. b.**

     donc : $\quad u_{n+1}\geqslant (u_0+n)+1\quad$ d'après l'hypothèse de réc.

     donc : $\quad u_{n+1}\geqslant u_0+n+1$

     Ainsi on a montré que : $\quad P(n)$ vraie $\to P(n+1)$ vraie

   - Bilan : on en déduit, d'après le principe de récurrence que :

     $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\geqslant u_0+n$

   **e.** $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\geqslant u_0+n$

   Or $\quad\lim(u_0+n)=+\infty\quad$ donc par comparaison $\quad\lim u_n=+\infty$.

## Exercice 3

1. $u_n=5-n\quad$ majorée par 5 , mais non minorée car $\lim u_n=-\infty$.

2. $u_n=(-2)^n$

3. $u_n=(-2)^n$

4. $u_n=-3\times(\frac{1}{2})^n$