1. $(1 + 3i)\,\bar{z} + 2 = 2z - 4i \Leftrightarrow (1 + 3i)(x - iy) + 2 = 2x + 2iy - 4i$ avec $z = x + i\,y$ (forme alg.)

$\Leftrightarrow (x + 3y + 2) + (3x - y)\,i = 2x + i\,(2y - 4)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2 = 2x \\ 3x - y = 2y - 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y = -2 \\ 3x - 3y = -4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ … (résolution du système par substitution ou combinaisons)

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{3} \\ x = -3 \end{cases}$ d'où $S = \{ -3 - \frac{5}{3} i \}$

2. $\forall\, z \neq 5 \quad \frac{z - 3i}{5 - z} = 1 - i \Leftrightarrow z - 3i = (5 - z)(1 - i)$

$\Leftrightarrow z - 3i = 5 - 5i - z + iz$

$\Leftrightarrow (2 - i)z = 5 - 2i$

$\Leftrightarrow z = \frac{5 - 2i}{2 - i} = \frac{(5 - 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{12 + i}{5} = \frac{12}{5} + \frac{1}{5} i$

d'où $S = \{ \frac{12}{5} + \frac{1}{5} i \}$

3. Posons $Z = z^2$

$(E3) \Leftrightarrow z^4 + z^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow Z^2 + Z - 12 = 0 \Leftrightarrow Z = 3$ ou $Z = -4$ $(\Delta = 49)$

On cherche donc z tel que $z^2 = 3$ ou $z^2 = -4$ d'où $S = \{ 2i ; -2i ; \sqrt{3} ; -\sqrt{3} \}$

4. $(3 - 3i)\,z = 1 + 2(i + z) \Leftrightarrow (3 - 3i - 2)\,z = 1 + 2i \Leftrightarrow (1 - 3i)\,z = 1 + 2i \Leftrightarrow z = \frac{1 + 2i}{1 - 3i} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i$

d'où $S = \{ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \}$

5. $\forall\, z \neq 2 \quad \frac{i z^2 - 4}{z - 2} = 2 \Leftrightarrow i z^2 - 4 = 2z - 4$

$\Leftrightarrow i z^2 - 2 z = 0$

$\Leftrightarrow z (i z - 2) = 0$ → produit nul

$\Leftrightarrow z = 0$ <u>ou</u> $i z - 2 = 0$ donc $z = \frac{2}{i} = -2 i$

$S = \{ 0 ; -2 i \}$

6. $z \bar{z} - z^2 = 8 \Leftrightarrow (x^2 + y^2) - (x + iy)^2 = 8$ en posant $z = x + i\,y$ (forme algébrique)

$\Leftrightarrow (x^2 + y^2) - (x^2 - y^2 + 2xy\,i) = 8$

$\Leftrightarrow 2y^2 - 2xy\,i = 8$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4 \\ 2xy = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \text{ ou } y = -2 \\ x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases}$

Or $y = 0$ impossible car $y = 2$ ou $y = -2$

d'où $x = 0$ et $y = 2$ ou -2 ainsi $S = \{ 2i ; -2i \}$