

Barème sur 20 points

EXERCICE 1**10,5 pts**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On note A le point d'affixe i .

A tout point M du plan, distinct de A et d'affixe z , on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{iz}{z-i}$

Le point M' est appelé l'image de M .

1.
 - a. Calculer l'affixe $z_{B'}$ du point B' image du point B d'affixe $z_B = 1$, et la donner sous forme algébrique.
 - b. Déterminer l'affixe du point C tel que l'image de C ait pour affixe 2, et la donner sous forme algébrique.
 - c. Exprimer $\overline{z'}$ en fonction de $\overline{z}$, puis en déduire que si z est un imaginaire pur distinct de i , alors z' l'est aussi.
 - d. Déterminer les points M du plan tels que l'on ait $M = M'$
2. Etant donné un nombre complexe z distinct de i , on pose $z = x + iy$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.
 - a. Montrer que : $Im(z') = \frac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + (y-1)^2}$
 - b. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z telle que z' soit réel.

EXERCICE 2**3,5 pts**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Soit A, B et C trois points du plan d'affixes respectives z_A, z_B et z_C .

On note A' le milieu de [BC], et B' le milieu de [AC].

Soit G le point d'affixe z_G défini par $\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{A'G} = \vec{0}$.

1. Montrer que $z_G = \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C)$.
2. Montrer que les points B, G et B' sont alignés.

EXERCICE 3 Vrai ou faux**6 pts**

Pour chacune des propositions suivantes, déterminer en justifiant si elle est vraie ou fausse.

1. *Proposition 1* : L'équation $z^3 + z^2 + 1 - i = 0$ admet une solution réelle.
2. *Proposition 2* : $\forall k \in \mathbb{N}, (1-i)^{4k+2} \in i\mathbb{R}$
3. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$
Proposition 3 : Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ les points M d'affixe z et M' d'affixe $\frac{-1}{\overline{z}}$ sont alignés avec le point O.