1. Posons $Z = z^2$

( E1 ) $\Leftrightarrow z^4 + z^2 - 20 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Z^2 + Z - 20 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Z = -5$ ou $Z = 4$ $(\Delta = 81)$

$\Leftrightarrow \quad z^2 = -5$ ou $z^2 = 4$

Donc $S = \{ i\sqrt{5} ; -i\sqrt{5} ; 2 ; -2 \}$

2. $\forall z \neq 3 \quad \dfrac{z - 4i}{3 - z} = 2 + i \quad \Leftrightarrow \quad z - 4i = (3 - z)(2 + i)$

$\Leftrightarrow \quad z - 4i = 6 + 3i - 2z - iz$

$\Leftrightarrow \quad (3 + i)z = 6 + 7i$

$\Leftrightarrow \quad z = \dfrac{6 + 7i}{3 + i} = \dfrac{(6 + 7i)(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} = \dfrac{25 + 15i}{10} = \dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2}i$

d'où $\mathcal{S} = \{ \dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2}i \}$ car $\dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2}i \neq 3$

3. $z^2 - z\bar{z} = -2 \quad \Leftrightarrow \quad (x + iy)^2 - (x^2 + y^2) = -2$ en posant $z = x + i\,y$ (forme algébrique)

$\Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 + 2xy\,i - (x^2 + y^2) = -2$

$\Leftrightarrow \quad -2y^2 + 2xy\,i = -2$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y^2 = 1 \\ 2xy = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 1 \text{ ou } y = -1 \\ x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases}$

d'où $x = 0$ et $y = 1$ ou $-1$ ainsi $\mathcal{S} = \{ i ; -i \}$

4. $\forall z \neq -4i \quad \dfrac{i\,z^2 - 2}{z + 4\,i} = \dfrac{1}{2}i \quad \Leftrightarrow \quad 2\,(i\,z^2 - 2) = i\,(z + 4\,i)$

$\Leftrightarrow \quad 2\,i\,z^2 - 4 = i\,z - 4$

$\Leftrightarrow \quad 2\,i\,z^2 - i\,z = 0$

$\Leftrightarrow \quad i\,z\,(2\,z - 1) = 0 \rightarrow$ produit nul

$\Leftrightarrow \quad i\,z = 0$ ou $2\,z - 1 = 0$

$\mathcal{S} = \{ 0 ; \dfrac{1}{2} \}$

5. $2i\,\bar{z} + 4 = z + 3i \quad \Leftrightarrow \quad 2i(x - iy) + 4 = x + iy + 3i$ en posant $z = x + i\,y$ (forme algébrique)

$\Leftrightarrow \quad (2y - x) + (2x - y)\,i = -4 + 3i$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2y - x = -4 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2y + 4 \\ 2(2y + 4) - y = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2y + 4 \\ y = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = -\dfrac{5}{3} \\ x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

d'où $\mathcal{S} = \{ \frac{2}{3} - \frac{5}{3} i \}$

6. (S) : $\begin{cases} 3z + 2z' = 7 + i \\ -2z\ 5z' = 8 - 7i \end{cases}$

det ( S) = 3 * 5 – (–2)(2) = 19 ≠ 0 donc (S) admet un couple solution unique

$2L_1 + 3L_2 \rightarrow 19z' = 38 - 19i$

$z' = 2 - i$

$-5L_1 + 2L_2 \rightarrow -19z = -19 - 19i$

$z = 1 + i$

$\mathcal{S} = \{ (1 + i\ ;\ 2 - i) \}$