1. Posons $Z = z^2$

(E1) $\Leftrightarrow z^4 - z^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow Z^2 - Z - 12 = 0 \Leftrightarrow Z = 4$ ou $Z = -3$ ($\Delta = 49$)

On cherche donc z tel que $z^2 = 4$ ou $z^2 = -3$

Donc $S = \{ 2 ; -2 ; i\sqrt{3} ; -i\sqrt{3} \}$

2. $\forall z \neq 3$ $\quad \dfrac{z - 4i}{3 - z} = 2 + i \Leftrightarrow z - 4i = (3 - z)(2 + i)$

$\Leftrightarrow z - 4i = 6 + 3i - 2z - iz$

$\Leftrightarrow (3 + i)z = 6 + 7i$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{6 + 7i}{3 + i} = \dfrac{(6 + 7i)(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} = \dfrac{25 + 15i}{10} = \dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2}i$

d'où $S = \{ \dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2}i \}$

3. $z^2 - z\bar{z} = -2 \Leftrightarrow (x + iy)^2 - (x^2 + y^2) = -2$ en posant $z = x + iy$ (forme algébrique)

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xy\,i - (x^2 + y^2) = -2$

$\Leftrightarrow -2y^2 + 2xy\,i = -2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \\ 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \text{ ou } y = -1 \\ x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases}$

d'où $x = 0$ et $y = 1$ ou -1 ainsi $S = \{ i ; -i \}$

4. $\forall z \neq -2i$ $\quad \dfrac{i z^2 - 1}{z + 2i} = \dfrac{1}{2} i \Leftrightarrow 2(i z^2 - 1) = i(z + 2i)$

$\Leftrightarrow 2i z^2 - 2 = iz - 2$

$\Leftrightarrow 2i z^2 - iz = 0$

$\Leftrightarrow iz(2z - 1) = 0$ → produit nul

$\Leftrightarrow iz = 0$ ou $2z - 1 = 0$

$S = \{ 0 ; \dfrac{1}{2} \}$

5. $2i\bar{z} + 5 = z + 2i \Leftrightarrow 2i(x - iy) + 5 = x + iy + 2i$ en posant $z = x + iy$ (forme algébrique)

$\Leftrightarrow (2y - x) + (2x - y)i = -5 + 2i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y - x = -5 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 5 \\ 2(2y + 5) - y = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 5 \\ y = -\dfrac{8}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{8}{3} \\ x = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

d'où $S = \{ -\dfrac{1}{3} - \dfrac{8}{3}i \}$