Les experts Corrigé DS 4

Ex 1 1/ * $1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

* $|z_2| = 2\sqrt{2}$ $z_2 = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

* $|Z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{1}{2}$ $\arg Z = \arg z_1 - \arg z_2 \ [2\pi]$

$= \frac{\pi}{12} \ [2\pi]$

donc $Z = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

2/ $Z = \frac{1-i}{\sqrt{2}-i\sqrt{6}} = \frac{(1-i)(\sqrt{2}+i\sqrt{6})}{8}$

$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$

3) $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\mathrm{Re}(Z)}{|Z|} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\mathrm{Im}(Z)}{|Z|} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Ex 2 1/ * $z_A' = (1+i)(-2+2i)+2$

$= -4+2 = -2$

* $f(B) = A \iff (1+i)z_B + 2 = -2+2i$

$\iff (1+i)z_B = -4+2i$

$\iff z_B = \frac{-4+2i}{1+i}$

$\iff z_B = \frac{(-4+2i)(1-i)}{2}$

$\iff z_B = (-2+i)(1-i)$

$\iff z_B = -1+3i$

2/ a) $\forall M \in \mathcal{P}$, $f(M) = M \iff (1+i)z+2 = z$

$\iff iz = -2$

$\iff z = 2i$

donc f admet un seul point invariant : le point Ω d'affixe $2i$.

b/ i. $\forall z \neq \omega$, $\frac{z'-z}{2i-z} = \frac{iz+2}{2i-z} = \frac{-i(-z+2i)}{2i-z} = -i$

ii. Soit $M \neq \Omega$

$\frac{z'-z}{2i-z} = -i \Rightarrow \left|\frac{z'-z}{2i-z}\right| = |-i|$

$\Rightarrow \frac{|z'-z|}{|2i-z|} = 1$

$\Rightarrow \frac{MM'}{\Omega M} = 1$

$\Rightarrow MM' = \Omega M$

$M \neq \Omega \Rightarrow z' \neq z$

$\Rightarrow \frac{z'-z}{2i-z} \neq 0$

$\arg\left(\frac{z'-z}{2i-z}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} \ [2\pi]$

d'où $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'}) = -\frac{\pi}{2} \ [2\pi]$

iii. M' est l'image de Ω par la rotation de centre M et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Ex 3 * si $z = 0$ alors $z' = 0$ et triangle OMM' non défini (donc cas exclu).

* Soit $z \neq i$ et $z \neq 0$

OMM' rectangle en O $\iff (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} \ [\pi]$

$\iff \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \frac{\pi}{2} \ [\pi]$

or $\frac{z'}{z} = \frac{i}{z-i}$ d'où OMM' rect. en O $\iff \arg i - \arg(z-i) = \frac{\pi}{2} \ (\pi)$

$\iff \arg(z-i) = 0 \ [\pi]$

$\iff (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = 0 \ [\pi]$

donc l'ensemble cherché est inclus dans la droite d'éq. $y = 1$.

Ex 4 1. M orthocentre de ABC

2. $n = 4k+2$ $(k \in \mathbb{N})$