DEVOIR EN CLASSE n° 4

6 pts **Ex n° 1**

Soit les nombres complexes $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{6}$

1. Déterminer une forme trigonométrique de z_1, z_2 et $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$
2. Déterminer la forme algébrique de Z
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

8 pts **Ex n° 2**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}\ ; \vec{v})$.
On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M ' = f(M) d'affixe z' tel que :

$$z' = (1 + i)z + 2$$

1. Soit A le point d'affixe $z_A = -2 + 2i$.
   Déterminer les affixes des points A' et B vérifiant respectivement : A' = f (A) et f(B) = A.
2. Construction de l'image d'un point M
   a. Montrer qu'il existe un unique point invariant par f (confondu avec son image) dont l'affixe est 2i ; on notera Ω ce point et ω son affixe.
   b. **i.** Etablir que, pour tout nombre complexe distinct de ω, $\dfrac{z'-z}{\omega - z} = -i$.
   ii. Soit M un point distinct de Ω. Comparer MM' et MΩ et déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{M\Omega}\ ;\ \overrightarrow{MM'})$.
   iii. En déduire une méthode de construction de M' à partir de M.

3 pts **Ex n° 3**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}\ ; \vec{v})$.
On note A le point d'affixe i.
A tout point M du plan, distinct de A et d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{iz}{z - i}$.

Montrer que l'ensemble des points M tels que OMM' soit rectangle en O est inclus dans une droite que vous préciserez.

3 pts **Ex n° 4**

QCS : 1,5 pt par bonne réponse et – 0,75 par réponse fausse.
Une seule réponse est exacte par question.
Vous cocherez au maximum une réponse par question.

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}\ ; \vec{v})$.

   Soit trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c, deux à deux distincts et tels que le triangle ABC n'est pas équilatéral. Le point M est un point dont l'affixe z est telle que les nombres complexes $\dfrac{z-b}{c-a}$ et $\dfrac{z-c}{b-a}$ sont imaginaires purs.

   - ☐ M appartient aux cercles de diamètres respectifs [AC] et [AB]
   - ☐ M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
   - ☐ M est l'orthocentre du triangle ABC.

2. Soit n un entier naturel. Le nombre $(1 + i)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si n s'écrit sous la forme :

   ☐ $2k + 2$ ☐ $4k + 2$ ☐ $8k + 2$ (avec $k \in \mathbb{N}$)