les experts   Corrigé DS n° 3

Ex I

$a = 2024\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= 2024\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

$b = 2024\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right)\right)$

$= 2024\left(\cos\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7}\right)$

$c = 2024\left(\sin\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8}\right)$

$= 2024\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right)$

$= 2024\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$

Ex II

① $z^2 = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 + 2\sqrt{2+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\, i - \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)^2$

$= 2+\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\, i - \frac{2}{2+\sqrt{2}}$

$= \frac{(2+\sqrt{2})^2 - 2}{2+\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}\, i$

$= \frac{4+4\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}\, i$

$= \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+2)}{2+\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}\, i$

$= 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\, i$

② $|z^2| = |2\sqrt{2}(1+i)| = 2\sqrt{2}\,|1+i| = 2\sqrt{2}\times\sqrt{2} = 4$

$z^2 = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

③ $|z|^2 = |z|^2 \Rightarrow |z|^2 = 4$

$\Rightarrow |z| = 2$

$\arg(z^2) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2\arg(z) = \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$

$\Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{8} \quad [\pi]$

$\Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{8}$ ou $-\frac{7\pi}{8}$

or $\mathrm{Re}(z) > 0$ d'où $\arg(z) = \frac{\pi}{8}$

donc $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$

④ on en déduit $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

Ex III

① $\arg z = \arg(-1+i) + \arg\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right) = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{7} \quad [2\pi]$

d'où $\arg(z) = \frac{25\pi}{28} \quad [2\pi]$ donc $\arg(z) = \frac{25\pi}{28} - 2\pi = \frac{-31\pi}{28} \quad [2\pi]$

② $|z-1| = |\bar{z}+i| \Leftrightarrow |z-1| = |\overline{z-i}| \Leftrightarrow |z-1| = |z-i|$

$\Leftrightarrow AM = BM$ où $z_A = 1$ et $z_B = i$

$\Leftrightarrow M \in \Delta$ où Δ médiatrice de $[AB]$

or $\Delta : y = x$

③ $(1+i\sqrt{3})^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(1+i\sqrt{3})^n = 0 \ [\pi]$

$\Leftrightarrow n\arg(1+i\sqrt{3}) = 0 \ [\pi]$

$\Leftrightarrow n\frac{\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow n = 3k \quad k \in \mathbb{N}.$

④ $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i \Rightarrow \left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = |-i|$

$\Rightarrow \dfrac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = 1$ donc ABC isocèle en A

et $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i \Rightarrow \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(-i)\ [2\pi]$

$\Rightarrow (\vec{AB}\,;\vec{AC}) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

donc ABC rectangle en A

d'où ABC rectangle isocèle

⑤ $|\bar{z} + 1 - i| = \sqrt{2} \iff |\overline{z+1+i}| = \sqrt{2}$

$\iff |z+1+i| = \sqrt{2}$

$M \in \mathcal{E}_5 \iff CM = \sqrt{2}$ avec $z_C = -1-i$

donc $\mathcal{E}_5$ est un cercle passant par l'origine du repère

(on vérifie que $z=0$ vérifie l'égalité $|\bar{z}+1-i| = \sqrt{2}$)

~~⑥ a) $z' \in \mathbb{R} \iff z' = 0$ ou~~

⑥ a) $\forall z \neq -3$, $z' \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} z' = 0 \\ \text{ou} \\ z' \neq 0 \text{ et } \arg(z') = 0\ [\pi] \end{cases}$

$\iff \begin{cases} z = z_A \\ \text{ou} \\ z \neq z_A \text{ et } (\vec{BM}\,;\vec{AM}) = 0\ [\pi] \end{cases}$

$\iff \begin{cases} M = A \\ \text{ou} \\ M \neq A \text{ et } M \in (AB) \end{cases}$

donc l'ensemble cherché est la droite (AB) privée de B (car $z \neq z_B$)

b) $\forall z \neq -3$ $z' \in i\mathbb{R}^* \iff \arg(z') = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

$\iff (\vec{BM}\,;\vec{AM}) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

donc l'ensemble cherché est le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.

⑦ $|z| = 2$ et $z = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)$ donc $\arg z = \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$

$|z|^5 = 2^5$ $\qquad \arg(z^5) = 5\arg(z)\ [2\pi]$

$= 16|z|$ $\qquad = \dfrac{5\pi}{6}$ "

$= |16\bar{z}|$

$= \arg(\bar{z})\ [2\pi]$

$= \arg(16\bar{z})$ "

donc $z^5 = -16\bar{z}$