Barème sur 20 points

EXERCICE 1 Formes trigonométriques — 4 pts

Déterminer une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

$a = -2024\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ $\qquad b = 2024\left(-\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$

$c = 2024\left(\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + \mathrm{i}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$

EXERCICE 2 Lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{8}$ — 6 pts

On considère le nombre complexe $\quad z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,\mathrm{i}$

1. Montrer que $z^2 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\mathrm{i}$
2. Déterminer une forme trigonométrique de z^2.
3. En déduire une forme trigonométrique de z.
4. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

EXERCICE 3 QCS (une seule bonne réponse) — 10 pts

→ 1,25 pt par bonne réponse et $-0,4$ pt par réponse incorrecte

1. Soit $z = (-1+\mathrm{i})\left(\cos\frac{\pi}{7} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{7}\right)$. Un argument de z est :

   ☐ $\frac{11\pi}{28}$ ☐ $-\frac{31\pi}{28}$ ☐ $-\frac{17\pi}{28}$ ☐ $\frac{31\pi}{28}$

2. Dans le plan complexe, l'ensemble des points d'affixe z de forme algébrique $x + \mathrm{i}y$ vérifiant $|z-1| = |\overline{z}+\mathrm{i}|$ est la droite d'équation :

   ☐ $y = x-1$ ☐ $y = -x$ ☐ $y = -x+1$ ☐ $y = x$

3. Soit n un entier naturel. Le nombre $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^n$ est réel si et seulement si n s'écrit sous la forme :

   ☐ $3k$ ☐ $3k+1$ ☐ $3k+2$ ☐ $6k$

4. Soient A, B et C trois points distincts du plan complexe dont les affixes vérifient : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -\mathrm{i}$.
   Alors la nature exacte du triangle ABC est :

   ☐ équilatéral ☐ isocèle ☐ rectangle isocèle ☐ rectangle

Tournez svp !

5. Dans le plan complexe, l'ensemble des points d'affixe z de forme algébrique $x+\mathrm{i}y$ vérifiant $|\overline{z}+1-\mathrm{i}| = \sqrt{2}$ est

☐ le point d'affixe $-2\mathrm{i}$ ☐ une droite passant par l'origine du repère

☐ un cercle de centre d'affixe $1-\mathrm{i}$ ☐ un cercle passant par l'origine du repère

6. Soient A et B les points du plan complexe d'affixes respectives $z_A = 2\mathrm{i}$ et $z_B = -3$.
Soit $z \in \mathbb{C}$ et soit, pour tout $z \neq -3$, $z' = \dfrac{z-2\mathrm{i}}{z+3}$

a. L'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit réel est inclus dans :

☐ le segment [AB] ☐ la médiatrice de [AB]

☐ la droite (AB) ☐ le cercle de diamètre [AB]

b. L'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur non nul est inclus dans :

☐ la droite (AB) ☐ une droite passant par l'origine du repère

☐ un cercle de centre I d'affixe $\dfrac{3}{2}-\mathrm{i}$ ☐ le cercle de diamètre [AB]

7. Si $z = \sqrt{3}+\mathrm{i}$ alors z^5 est égal à :

☐ $16z$ ☐ $-16z$ ☐ $16\overline{z}$ ☐ $-16\overline{z}$