Corrigé DS n° 1

EXERCICE 1

1. (a) $z_{B'} = \dfrac{-i(-i)-2}{-i+1} = \dfrac{-3}{1-i} = \dfrac{-3(1+i)}{1^2+1^2} = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}i$

   (b) $\forall z \neq -1,\quad z' = \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{-iz-2}{z+1} = \dfrac{1}{2}$

$$\iff z+1 = 2(-iz-2)$$
$$\iff z+1 = -2iz-4$$
$$\iff (1+2i)z = -5$$
$$\iff z = \frac{-5}{1+2i} = \frac{-5(1-2i)}{1^2+2^2} = \frac{-5+10i}{5} = -1+2i$$

2. Soit $z \neq -1$, avec $z = x+iy$ (où $(x;y) \in \mathbb{R}^2$).

   (a) $z' = \dfrac{-i(x+iy)-2}{x+iy+1} = \dfrac{y-2-ix}{x+1+iy}$
$$= \frac{(y-2-ix)(x+1-iy)}{(x+1)^2+y^2}$$
$$= \frac{[(y-2)(x+1)-xy]+i[-x(x+1)-y(y-2)]}{(x+1)^2+y^2}$$

   d'où $\quad Im(z') = \dfrac{-x^2-x-y^2+2y}{(x+1)^2+y^2}$

   Donc on a bien $\quad Im(z') = -\dfrac{x^2+x+y^2-2y}{(x+1)^2+y^2}$

   (b) Pour M $\neq$ A, $\mathrm{M} \in \mathscr{E} \iff z' \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z') = 0$
$$\iff x^2+x+y^2-2y = 0$$
$$\iff \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 - \frac{5}{4} = 0$$
$$\iff \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4} = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$
$$\iff M \in \mathscr{C}_{\Omega,r} \quad \text{avec } z_\Omega = -\frac{1}{2}+i \text{ et } r = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

   Or le point A$(-1;0)$ appartient à ce cercle car ses coordonnées vérifient l'équation $x^2+x+y^2-2y=0$ du cercle.

   Donc $\mathscr{E}$ est le cercle de centre Ω et de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, privé de A.

EXERCICE 2

Soit $z = x+iy \quad$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$.

$$z^2+z = x^2+2ixy-y^2+x+iy = (x^2-y^2+x)+i(2xy+y)$$

$$z^2+z \in \mathbb{R} \iff Im(z^2+z) = 0$$
$$\iff 2xy+y = 0$$
$$\iff y(2x+1) = 0$$
$$\iff y = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

Donc l'ensemble cherché est la réunion de :

- l'axe des réels d'équation $\quad y = 0$
- le droite d'équation $\quad x = -\dfrac{1}{2}$

EXERCICE 3

1. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \iff z_A - z_G + z_B - z_G + z_C - z_G = 0$
$$\iff z_A + z_B + z_C = 3z_G$$
$$\iff z_G = \frac{z_A+z_B+z_C}{3}$$

2. $z_{A'} = \dfrac{z_B+z_C}{2}$

   $z_{\overrightarrow{AG}} = z_G - z_A = \dfrac{z_A+z_B+z_C}{3} - z_A = \dfrac{z_B+z_C-2z_A}{3}$

   $z_{\overrightarrow{AA'}} = z_{A'} - z_A = \dfrac{z_B+z_C}{2} - z_A = \dfrac{z_B+z_C-2z_A}{2}$

   On a donc : $\quad 3z_{\overrightarrow{AG}} = 2z_{\overrightarrow{AA'}}$

   D'où : $\quad \overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$

   Donc $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AA'}$ sont colinéaires, autrement dit $G \in (AA')$.

EXERCICE 4

1. $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \overline{\left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{\overline{z}}\right)} = \overline{\dfrac{1}{z}} - \overline{\dfrac{1}{\overline{z}}} = \dfrac{1}{\overline{z}} - \dfrac{1}{z} = -\left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{\overline{z}}\right)$

   Donc $\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{\overline{z}}$ est un imaginaire pur (car égal à l'opposé de son conjugué)

   Proposition fausse

2. Soit $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{3\mathrm{i}-z^2}{2+z\overline{z}} \in \mathbb{R} \iff \frac{3\mathrm{i}-z^2}{2+z\overline{z}} = \overline{\frac{3\mathrm{i}-z^2}{2+z\overline{z}}}$$

$$\iff \frac{3\mathrm{i}-z^2}{2+z\overline{z}} = \frac{-3\mathrm{i}-\overline{z}^2}{2+\overline{z}z}$$

$$\iff 3\mathrm{i}-z^2 = -3\mathrm{i}-\overline{z}^2$$

$$\iff 6\mathrm{i} = z^2-\overline{z}^2$$

$$\iff (z-\overline{z})(z+\overline{z}) = 6\mathrm{i}.$$

Proposition vraie

3. Soit $z = k\mathrm{i}$ avec $k \in \mathbb{R}$

z solution de (E) $\iff -k^3\mathrm{i}+(1-\mathrm{i})k^2+(1-\mathrm{i})(k\mathrm{i})+\mathrm{i} = 0$

$$\iff (k^2+k)+\mathrm{i}(-k^3-k^2+k+1) = 0$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} k^2+k & = & 0 \\ -k^3-k^2+k+1 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} k(k+1) & = & 0 \\ -k^3-k^2+k+1 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} k=-1 \text{ ou } k=0 & & \\ -k^3-k^2+k+1 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff k=-1$$

car seule la valeur -1 est solution de la 2ème équation

Donc l'équation (E) admet une seule solution imaginaire $(-\mathrm{i})$ **Proposition vraie**