Barème sur 20 points

Exercice 1 Ensembles de points **7 pts**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$

On note A le point d'affixe -1.

A tout point M d'affixe z, distinct de A, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{-iz-2}{z+1}$

Le point M' est appelé l'image de M.

1. a. Calculer l'affixe $z_{B'}$ du point B' image du point B d'affixe $z_B = -i$, et la donner sous forme algébrique.

   b. Déterminer l'affixe du point C tel que l'image de C ait pour affixe $\dfrac{1}{2}$, et la donner sous forme algébrique.

2. Etant donné un nombre complexe z distinct de -1, on pose $z = x + iy$ où x et y désignent deux nombres réels.

   a. Montrer que : $Im(z') = -\dfrac{x^2+x+y^2-2y}{(x+1)^2+y^2}$

   b. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z telle que z' soit réel.

Exercice 2 Réunion d'ensembles de points **3,5 pts**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$

Montrer que l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M d'affixe z tels que $z^2 + z$ soit un nombre réel est la réunion de deux droites que l'on déterminera.

Exercice 3 Centre de gravité d'un triangle **3,5 pts**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$

Soit A, B et C trois points du plan d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

On rappelle que le centre de gravité du triangle est le point, noté G, défini par $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

1. Exprimer l'affixe de G en fonction de z_A, z_B et z_C.
2. Montrer que G appartient à la médiane (AA') du triangle ABC, où A' est le milieu de [BC].

Exercice 4 Vrai ou faux **6 pts**

Pour chacune des propositions suivantes, déterminer en justifiant si elle est vraie ou fausse.

1. $\forall z \in \mathbb{C}^*, \ \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{\overline{z}} \in \mathbb{R}$

2. Pour tout nombre complexe z, le nombre $\dfrac{3i - z^2}{2 + z\overline{z}}$ est réel si et seulement si $(z - \overline{z})(z + \overline{z}) = 6i$.

3. Soit l'équation (E) : $z^3 - (1-i)z^2 + (1-i)z + i = 0$ où $z \in \mathbb{C}$.
   Parmi les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$, une seule est un imaginaire pur.