Les experts Corrigé DM 15 janvier

Ex I ① Soit $z = x + iy$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;-2)\}$

$$f(z) = \frac{x+iy-2+i}{x+iy+2i} = \frac{(x-2)+i(y+1)}{x+i(y+2)} = \frac{[(x-2)+i(y+1)][x-i(y+2)]}{x^2+(y+2)^2}$$

$$= \frac{x(x-2)+(y+1)(y+2)}{x^2+(y+2)^2} + i\,\frac{x(y+1)-(x-2)(y+2)}{x^2+(y+2)^2}$$

$$= \frac{x^2-2x+y^2+3y+2}{x^2+(y+2)^2} + i\,\frac{-x+2y+4}{x^2+(y+2)^2}$$

a) $\forall z \neq -2i$ $\quad M(z) \in E \iff f(z) \in \mathbb{R}$

$\iff \mathrm{Im}(f(z)) = 0$

$\iff -x+2y+4 = 0$

$\iff M \in \Delta$ (Δ droite d'équation $-x+2y+4=0$)

on remarque que $B(0;-2) \in \Delta$ car $-0+2\times(-2)+4 = 0$

donc $\boxed{E = \Delta \setminus \{B\}}$

b) $\forall z \neq -2i$ $\quad M(z) \in F \iff f(z) \in i\mathbb{R}$

$\iff \mathrm{Re}(f(z)) = 0$

$\iff x^2-2x+y^2+3y+2 = 0$

$\iff (x-1)^2 + \left(y+\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

$\iff M \in \mathcal{C}_{\Omega;\frac{\sqrt{5}}{2}}$ avec $z_\Omega = 1 - \frac{3}{2}i$

on remarque que $B(0;-2) \in \mathcal{C}_{\Omega;\frac{\sqrt{5}}{2}}$ car $(0-1)^2 + \left(-2+\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

donc $F = \mathcal{C}_{\Omega;\frac{\sqrt{5}}{2}} \setminus \{B\}$

② a) $\forall M \neq B$ $\quad M \in E \iff f(z) \in \mathbb{R}$

$\iff \begin{cases} Z = 0 \\ \text{ou} \\ Z \neq 0 \text{ et } \arg Z = 0\ [\pi] \end{cases}$

$\iff \begin{cases} M = A \\ \text{ou} \\ M \neq A \text{ et } (\vec{BM};\vec{AM}) = 0\ [\pi] \end{cases}$

donc $E = (AB) \setminus \{B\}$

b) $\forall M \neq B$ $\quad M \in F \iff \begin{cases} Z = 0 \\ \text{ou} \\ Z \neq 0 \text{ et } \arg(Z) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \end{cases}$

$\iff \begin{cases} M = A \\ \text{ou} \\ M \neq A \text{ et } (\vec{MB},\vec{MA}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \end{cases}$ → donc $F = \mathcal{C} \setminus \{B\}$

où $\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre $[AB]$

③ $\forall z \neq -2i \quad f(z) - 1 = \dfrac{z - 2 + i}{z + 2i} - 1$

$= \dfrac{-2 - i}{z + 2i}$

d'où $|f(z) - 1| = \dfrac{|-2 - i|}{|z + 2i|}$

donc $|f(z) - 1| \times |z + 2i| = |-2 - i| = \sqrt{5}$

donc si $M \in \mathcal{C}_{B;\sqrt{5}}$ alors $BM = \sqrt{5}$

$|z + 2i| = \sqrt{5}$

d'où $|f(z) - 1| = 1$

$CM = 1$ avec $z_C = 1$

$M \in \mathcal{C}_{C;1}$

Ex 2 ① $AB = |z_B - z_A| = |3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

b/ $BC = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$ donc ABC équilatéral

$AC = |3 - i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

c/ $\dfrac{z_A - z_C}{z_G - z_C} = \dfrac{-3 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \dfrac{(-3 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})}{4} = \dfrac{-3 + 3 + i\sqrt{3} + 3i\sqrt{3}}{4} = i\sqrt{3}$

donc $\arg\left(\dfrac{z_A - z_C}{z_G - z_C}\right) = \arg(i\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

d'où $(\overrightarrow{CG}; \overrightarrow{CA}) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ et $\dfrac{AC}{GC} = |i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

donc GAC est un triangle rectangle en C (mais non isocèle)

② a) option 1 on connaît la formule donnant les coordo du barycentre d'un système de points pondérés.

on calcule alors $\dfrac{1}{-1+2+2} \times \left[(-1) \times z_A + 2z_B + 2z_C\right] = \dfrac{1}{3} \times \left[1 + 4 + 2i\sqrt{3} + 4 - 2i\sqrt{3}\right]$

$= \dfrac{1}{3}[9]$

$= 3$

$= z_G$

donc G est bien le barycentre du système $\{(A, -1); (B; 2); (C; 2)\}$

option 2 on connaît seulement la définition vectorielle de ce barycentre

on vérifie alors que $-\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

comment ? En calculant l'affixe de $-\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC}$.

$-(z_A - z_G) + 2(z_B - z_G) + 2(z_C - z_G) = \dots\dots = 0$

Cqfd

b) Pour tout point M du plan, on a :

$$-\vec{MA} + 2\vec{MB} + 2\vec{MC} = -(\vec{MG}+\vec{GA}) + 2(\vec{MG}+\vec{GB}) + 2(\vec{MG}+\vec{GC})$$

$$= (-1+2+2)\vec{MG} + \underbrace{(-\vec{GA}+2\vec{GB}+2\vec{GC})}_{\vec{0} \text{ par déf. du barycentre}}$$

$$= 3\vec{MG}$$

donc $(-\vec{MA}+2\vec{MB}+2\vec{MC}).\vec{CG} = 12 \iff 3\vec{MG}.\vec{CG} = 12$

$\iff \vec{MG}.\vec{CG} = 4$

$\iff \vec{GM}.\vec{CG} = -4$

c) $\vec{GA}.\vec{CG} = (-4)(1) + (0)(\sqrt{3})$ car $\vec{GA}\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$ $\vec{CG}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$

$= -4$

donc $A \in (D)$

d) $(2) \iff \vec{GM}.\vec{CG} = \vec{GA}.\vec{CG}$ car $A \in (D)$

$\iff (\vec{GM}-\vec{GA}).\vec{CG} = 0$

$\iff \vec{AM}.\vec{CG} = 0$

e) $M \in (D) \iff \vec{AM}.\vec{CG} = 0$

$\iff \vec{AM} \perp \vec{CG}$

donc (D) est la droite perpendiculaire à (CG) passant par A.

c'est donc la droite (AC) (car GAC rectangle en C)