$\longrightarrow$ voir si nécessaire mini aide en ligne sur www.mathamia.fr

EXERCICE 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, unité graphique 4 cm.
Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, i désigne le nombre de module 1, et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
On appelle f l'application, qui, à tout nombre complexe z différent de $-2\mathrm{i}$, associe

$$Z = f(z) = \frac{z-2+\mathrm{i}}{z+2\mathrm{i}}.$$

1. Soit $z = x + \mathrm{i}y$, avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; -2)\}$, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et de y.
   En déduire la nature de :
   a. l'ensemble E des points M d'affixe z, tels que Z soit un réel ;
   b. l'ensemble F des points M d'affixe z du plan, tels que Z soit un imaginaire pur éventuellement nul.
   c. Représenter ces deux ensembles.
2. On appelle A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2 - \mathrm{i}$ et $z_B = -2\mathrm{i}$.
   En remarquant que $Z = \dfrac{z - z_A}{z - z_B}$, retrouver les ensembles E et F par une méthode géométrique.
3. Calculer $|f(z)-1| \times |z+2\mathrm{i}|$, et en déduire que les points M' d'affixe Z, lorsque le point M d'affixe z parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$, sont tous sur un même cercle dont on précisera le rayon et l'affixe du centre.

EXERCICE 2

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\ \vec{u},\ \vec{v})$. (Unité graphique : 2 cm.)
   On désigne par A, B, C et G les points du plan d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = -1,\ z_{\mathrm{B}} = 2 + \mathrm{i}\sqrt{3},\ z_{\mathrm{C}} = 2 - \mathrm{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{G}} = 3.$$

   a. Réaliser une figure et placer les points A, B, C et G.
   b. Calculer les distances AB, BC et AC. En déduire la nature du triangle ABC.
   c. Calculer un argument du nombre complexe $\dfrac{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{G}} - z_{\mathrm{C}}}$. En déduire la nature du triangle GAC.
2. Soit (D) l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left(-\overrightarrow{M\mathrm{A}} + 2\overrightarrow{M\mathrm{B}} + 2\overrightarrow{M\mathrm{C}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{CG}} = 12 \quad (1)$$

   a. Montrer que G est le barycentre du système de points pondérés

$$\{(\mathrm{A},\ -1)\ ;\ (\mathrm{B},\ 2)\ ;\ (\mathrm{C},\ 2)\}.$$

   b. Montrer que la relation (1) est équivalente à la relation $\overrightarrow{\mathrm{G}M}.\overrightarrow{\mathrm{CG}} = -4 \quad (2)$.
   c. Vérifier que le point A appartient à l'ensemble (D).
   d. Montrer que la relation (2) est équivalente à la relation $\overrightarrow{\mathrm{A}M}.\overrightarrow{\mathrm{GC}} = 0$.
   e. En déduire l'ensemble (D) et le tracer.