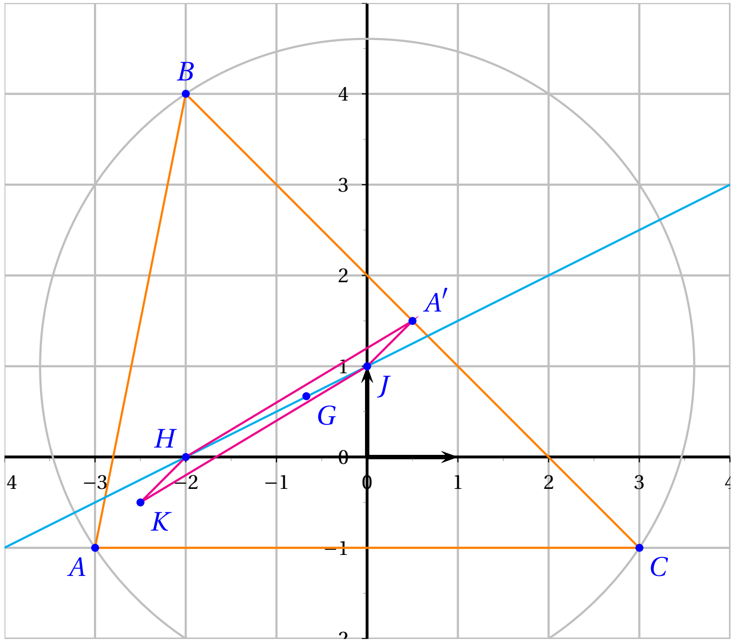
Corrigé Fiche n° 24

Exercice n° 1 :

1. Figure :

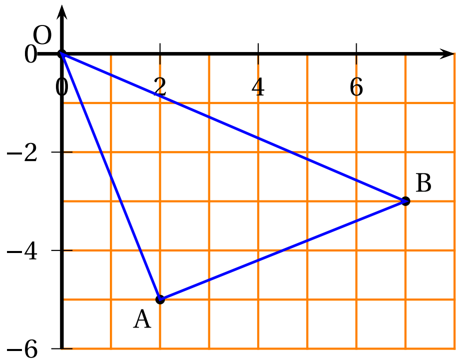


2. $JA = \left|j-a\right| = |-3-2\mathrm{i}| = \sqrt{(-3)^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$. On trouve de même que $JB = \sqrt{13}$ et que $JC = \sqrt{13}$. Le cercle circonscrit au triangle ABC a donc pour centre J et pour rayon $\sqrt{13}$.
3. On a : $\dfrac{b-c}{h-a} = \dfrac{-5+5\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{(-5+5\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2} = 5\mathrm{i}$.
   Par conséquent : $\left(\overrightarrow{AH}\,;\,\overrightarrow{CB}\right) = \arg(5\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$, ce qui prouve que $(AH) \perp (BC)$.
4. G est l'isobarycentre du système $\{A\,;\,B;\,C\}$ donc, d'après le cours :
$$g = \frac{a+b+c}{3} = \frac{-3-i-2+4\mathrm{i}+3-\mathrm{i}}{3} = -\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\mathrm{i}.$$
5. Le vecteur $\overrightarrow{HJ}$ a pour affixe $j-h = 2+\mathrm{i}$, le vecteur $\overrightarrow{JG}$ a pour affixe $g-j = -\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}\mathrm{i}$. On a donc $g-j = -\dfrac{1}{3}(j-h)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{JG} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{HJ}$. Ces deux vecteurs étant colinéaires, les points J, G et H sont donc alignés, ce qui se vérifie sur la figure.
6. (a) Notons k l'affixe du point K, alors : $k = \dfrac{a+h}{2} = \dfrac{-3-\mathrm{i}-2}{2} = -\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

   (b) Le vecteur $\overrightarrow{KH}$ a pour affixe $h-k = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ et le vecteur $\overrightarrow{JA'}$ a pour affixe $a'-j = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$. Ces deux vecteurs ayant même affixe, ils sont égaux, et le quadrilatère $KHA'J$ est donc un parallélogramme.

Exercice n° 2 : VRAI ou FAUX

1. **Méthode 1 : hors programme de révision pour DS de lundi!**



Le dessin suggère de considérer la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Son écriture complexe est : $z' - z_{\mathrm{A}} = \mathrm{i}\,(z-z_{\mathrm{A}}) \iff z' - 2 + 5\mathrm{i} = \mathrm{i}\,(z-2+5\mathrm{i})$.
L'image B′ du point B dans cette rotation a donc pour affixe :
$z_{\mathrm{B}'} - 2 + 5\mathrm{i} = \mathrm{i}\,(7-3\mathrm{i}-2+5\mathrm{i}) \iff$
$z_{\mathrm{B}'} = 2-5\mathrm{i}+5\mathrm{i}-2 = 0$.
L'image de B dans la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ est le point O. Ceci démontre que le triangle ABO est isocèle et rectangle en A.

Méthode 2 : $\mathrm{OA}^2 = |z_{\mathrm{A}}|^2 = 2^2+5^2 = 29$;
$\mathrm{AB}^2 = |z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}|^2 = |7-3\mathrm{i}-2+5\mathrm{i}|^2 = |5+2\mathrm{i}|^2 = 25+4 = 29$;
$\mathrm{OB}^2 = |z_{\mathrm{B}}|^2 = |7-3\mathrm{i}|^2 = 7^2+3^2 = 49+9 = 58$.
D'une part $\mathrm{AO}^2 = \mathrm{AB}^2 \iff \mathrm{AO} = \mathrm{AB} \iff$ ABO est isocèle en A;
D'autre part $29+29 = 58 \iff \mathrm{AO}^2+\mathrm{Ab}^2 = \mathrm{OB}^2 \iff$ ABO est rectangle en A d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

Méthode 3 :
Soit $Z = \dfrac{z_{\mathrm{O}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}} = \dfrac{-2+5\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}(2\mathrm{i}+5)}{2\mathrm{i}+5} = \mathrm{i}$.
On a $Z = \dfrac{\mathrm{AO}}{\mathrm{AB}} = 1$, soit $\mathrm{AO} = \mathrm{AB}$;

De plus $\arg(Z) = \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AO}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ ce qui montre que l'angle $\widehat{\mathrm{BAO}}$ est droit.
Le triangle ABO est donc rectangle isocèle en A.

Méthode 4 :
$\dfrac{z_{\mathrm{O}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}} = \dfrac{z_{\mathrm{O}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}} = \mathrm{i}$ signifie que O est l'image de B dans la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

2. Soient A et B les points d'affixes respectives i et $-2\mathrm{i}$.

   On a $|z-\mathrm{i}| = |z+2\mathrm{i}| \iff \mathrm{A}M = \mathrm{B}M \iff M \in \Delta$ médiatrice de [AB]. mais comme A et B appartiennent à l'axe des ordonnées, la médiatrice de [AB] (d'équation $y = -\dfrac{1}{2}$ est parallèle à l'axe des abscisses. La proposition est vraie.

3. $z = 3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, donc $|z|^2 = 9 + 3 = 12 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow |z| = 2\sqrt{3}$. On peut en factorisant ce module écrire :

   $$z = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{donc } \arg(z) = \frac{\pi}{6} \quad [2\pi].$$

   Donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $\arg\left(z^{3n}\right) = 3n\arg(z) = 3n\dfrac{\pi}{6} = n\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.
   Donc z^{3n} n'est un nombre imaginaire que pour n impair. La proposition est fausse.

4. Soit z un nombre complexe non nul d'argument $\dfrac{\pi}{2}$. On peut donc écrire $z = \rho\mathrm{i}$ avec ρ réel positif non nul.

   Donc $|\mathrm{i} + z| = 1 + |z| \iff |\mathrm{i} + \rho\mathrm{i}| = 1 + |\rho\mathrm{i}| \iff |\mathrm{i}(1+\rho)| = 1 + |\rho\mathrm{i}| \iff 1 + \rho = 1 + \rho$ qui est bien vraie.

   La proposition 4 est vraie.

5. **Question hors programme de révision pour DS de lundi !**

   Soit z un nombre complexe non nul.

   Si le module de z est égal à 1 alors z s'écrit $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

   Donc $z^2 + \dfrac{1}{z^2} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta} = \cos 2\theta + \mathrm{i}\sin 2\theta + \cos 2\theta - \mathrm{i}\sin 2\theta = 2\cos 2\theta$ qui est un réel.

Exercice n° 3 : QCS

Erreur dans l'énoncé : la question 2 a deux réponses exactes

1. **Question hors programme de révision pour DS de lundi !**

   E est le point d'affixe z_E telle que : $\dfrac{z_E - z_A}{z_D - z_A} = \cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}$

   On en déduit $z_E = \left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(-\mathrm{i} - 1) + 1 = \left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)(1 - \mathrm{i})$ (réponse 2).

2. $|z+\mathrm{i}| = |z-1| \Leftrightarrow |z - z_{\mathrm{D}}| = |z - z_{\mathrm{A}}| \Leftrightarrow \mathrm{D}M = \mathrm{A}M$ si M est le point d'affixe z. L'ensemble cherché est donc la médiatrice du segment [AD].
   Comme ABCD est de manière évidente un carré, c'est aussi la médiatrice du segment [BC]. (réponses 1 et 4)

3. On doit avoir $z \neq -1$.
   $\dfrac{z+\mathrm{i}}{z+1} \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z+\mathrm{i}}{z+1}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MC}\,;\,\overrightarrow{MD}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$. On obtient le cercle de diamètre [CD], privé de C. (réponse 2)

   Méthode analytique : $\dfrac{z+\mathrm{i}}{z+1} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \left(\dfrac{z+\mathrm{i}}{z+1}\right) + \overline{\left(\dfrac{z+\mathrm{i}}{z+1}\right)} = 0 \Rightarrow \dfrac{z+\mathrm{i}}{z+1} + \dfrac{\overline{z}-\mathrm{i}}{\overline{z}+1} = 0$
   $\Rightarrow (z+\mathrm{i})(\overline{z}+1) + (z+1)(\overline{z}-\mathrm{i}) = 0$ (avec $z \neq -1$)
   $\Rightarrow 2z\overline{z} + (z+\overline{z}) - \mathrm{i}(z-\overline{z}) = 0 \Rightarrow 2(x^2+y^2) + 2x + 2y = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x + y = 0$
   $\Rightarrow \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} + \left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} = 0 \Rightarrow \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$ (et $z \neq -1$).
   Le centre du cercle Ω a donc pour affixe $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\mathrm{i}}{2}$ et le rayon vaut $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   Son diamètre a donc une longueur égale à $\sqrt{2}$ et son centre Ω est le milieu de [CD] car son affixe est la demi-somme des affixes de C et de D.
   Mais $\mathrm{CD} = |z_{\overrightarrow{CD}}| = |-\mathrm{i}+1| = \sqrt{2}$, on déduit que ce cercle est celui de diamètre [CD].
   L'ensemble cherché est donc ce cercle auquel on enlève le point C dont l'affixe annule le dénominateur $(z+1)$.

4. $\arg(z-\mathrm{i}) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \arg\left(z_{\overrightarrow{BM}}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{BM}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.
   $\arg(z-\mathrm{i})$ n'existe que si $z \neq \mathrm{i}$, donc $M \neq \mathrm{B}$.
   On obtient la demi-droite]BD]. (réponse 3)

Exercice n° 4 :

1. (a) Pour un point M d'affixe z et son image M' par h d'affixe z', la traduction complexe de l'égalité $\overrightarrow{SM'} = 3\overrightarrow{SM}$ est :
   $z' - (-5+5\text{i}) = 3[z - (-5+5\text{i})] \iff z' = -5+5\text{i}+3z+15-15\text{i} \iff z' = 3z+10-10\text{i}$.

   (b) On a C $= h$(A), donc $c = 3(-2+4\text{i}) + 10 - 10\text{i} = 4+2\text{i}$.
   De même D $= h$(B) donc $d = 3(-4+2\text{i}+10-10\text{i} = -2-4\text{i}$.

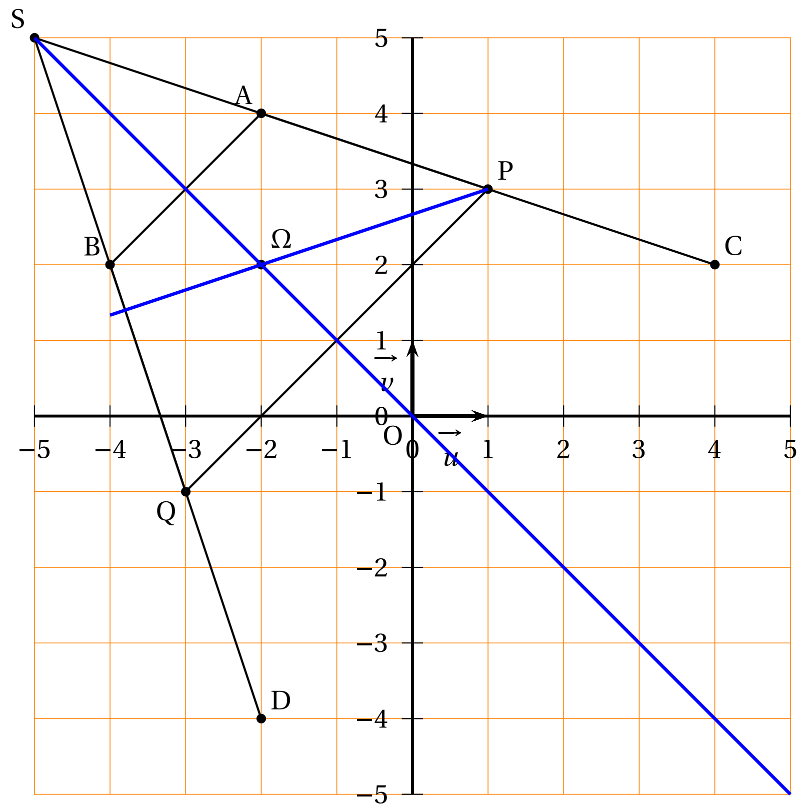
2. On a : $|a|^2 = 4+16 = 20$, $|b|^2 = 16+4 = 20$, $|c|^2 = 16+4 = 20$ et $|d|^2 = 4+16 = 20$, d'où $|a| = \text{OA} = |b| = \text{OB} = |c| = \text{OC} = |d| = \text{OD} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
   Les points A, B, C et D appartiennent au cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{5}$.

3. Le milieu I de [AB] a pour coordonnées $(-3\ ;\ 3)$.
   $M(x\ ;\ y)$ appartient à la médiatrice de [AB] si et seulement si $(M\text{I}) \perp (\text{AB}) \iff \overrightarrow{M\text{I}} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = 0 \iff -2(-3-x) - 2(3-y) = 0 \iff -3-x+3-y = 0 \iff x+y = 0$
   S$(-5\ ;\ 5)$ appartient à cette médiatrice ;
   $\Omega(-2\ ;\ 2)$ appartient à cette médiatrice.
   Conclusion : (SΩ) est la médiatrice de [AB].

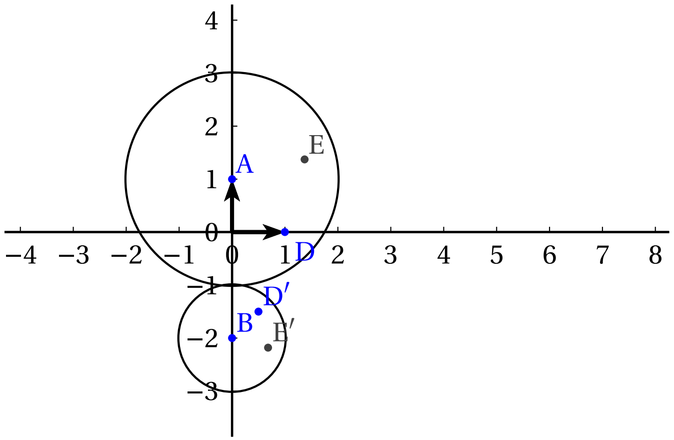
4. (a) On a $p = \dfrac{1}{2}(-2+4\text{i}+4+2\text{i}) = 1+3\text{i}$.

   (b) $\dfrac{\omega - p}{d-b} = \dfrac{-2+2\text{i}-1-3\text{i}}{-2-4\text{i}+4-2\text{i}} = \dfrac{-3-\text{i}}{2-6\text{i}} = \dfrac{(-3-\text{i})(2+6\text{i})}{(2-6\text{i})(2+6\text{i})} = \dfrac{-6+6-18\text{i}-2\text{i}}{4+36} = \dfrac{-20\text{i}}{40} = -\dfrac{1}{2}\text{i}$.
   En terme d'argument la relation précédente signifie que :
   $\left(\overrightarrow{\text{BD}}, \overrightarrow{\text{P}\Omega}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$. Conclusion : la droite (PΩ) est perpendiculaire à la droite (BD).

5. Par l'homothétie h l'image (CD) de la droite (AB) est parallèle à cette dernière : le quadrilatère ABDC est un trapèze ; dans ce trapèze la droite des « milieux » (PQ) est parallèle à (AB) et à (CD).
   Or on a vu que (AB) et (SΩ) sont perpendiculaires. Donc (SΩ) est aussi perpendiculaire à (PQ).
   Donc dans le triangle PQS, (SΩ) et (PΩ) sont deux hauteurs : le point Ω est l'orthocentre du triangle PQS.



Exercice 5



1. **Question hors programme de révision pour DS de lundi!**
Le point E est obtenu par rotation autour de A, d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ du point D donc
$z_E - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_D - z_A)$ donc $z_E = e^{i\frac{\pi}{3}}(1-i)+i = \left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\times(1-i)+i = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} = \left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)$.

2. $z_{D'} = \dfrac{2-i}{i+1} = \dfrac{(2-i)(1-i)}{1^2+1^2} = \dfrac{1-3i}{2} = 0,5-1,5i$.

3. (a) Pour tout nombre complexe z différent de i,
$\left(z'+2i\right)(z-i) = \left(\dfrac{2z-i}{iz+1}+2i\right)(z-i) = \left(\dfrac{2z-i+2i(iz+1)}{iz+1}\right)(z-i) = \dfrac{i}{iz+1}\times(z-i) = \dfrac{i}{i(z-i)}\times(z-i) = 1.$

(b) Donc pour tout nombre complexe z différent de i, $\left(z'+2i\right)(z-i) = 1$ en prenant les modules et les arg :
Comme $(z'+2i) = z_{\overrightarrow{BM'}}$; $(z-i) = z_{\overrightarrow{AM}}$, et comme $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BM'}\right) = \arg\left(z'+2i\right)$
Ainsi que $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}\right) = \arg(z-i)$.
Pour tout point M d'affixe $z (z \neq i)$:
$BM' \times AM = 1$
et $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BM'}\right) + \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}\right) = k\times 2\pi$ où k est un entier relatif.

4. (a) Les points D et E appartiennent à un même cercle (C) de centre A et de rayon par la rotation du 1) et le rayon est AD $=\sqrt{2}$.

(b) Donc AE $=\sqrt{2}$,AD $=\sqrt{2}$ donc en utilisant la relation sur les longueurs :
$AD \times BD' = 1, \quad AE \times BE' = 1$ donc $BE' = BD' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
Et avec les angles :
$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BE'}\right) + \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AE}\right) = k\times 2\pi$ où k est un entier relatif.
et $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BD'}\right) + \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AD}\right) = k'\times 2\pi$ où k' est un entier relatif., on retranche ces deux relations
$\left(\overrightarrow{BD'}, \overrightarrow{BE'}\right) + \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right) = k''\times 2\pi$ où k'' est un entier relatif.
$\left(\overrightarrow{BD'}, \overrightarrow{BE'}\right) + \dfrac{\pi}{3} = k''\times 2\pi$ où k'' est un entier relatif.
Donc $\left(\overrightarrow{BD'}, \overrightarrow{BE'}\right) = -\dfrac{\pi}{3} + k''\times 2\pi$ où k''est un entier relatif.

(c) Ainsi le triangle BD$'E'$ est isocèle en B et avec un angle de $-\dfrac{\pi}{3}$, il est équilatéral indirect.