Les experts - Corrigé DS n° 5

Ex 1 **2 pts**

1. Soit $a \in \mathbb{R}$.
$\det(A) = (a)(-a) - (1)(2) = -a^2 - 2$
Donc, pour tout réel a, $\det(A) \neq 0$ car $-a^2 - 2 \leqslant -2$.
Donc, A est inversible pour tout réel a.

2. $M_a^{-1} = \dfrac{1}{-a^2-2}\begin{pmatrix} -a & -2 \\ -1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{a^2+2} & \dfrac{2}{a^2+2} \\ \dfrac{1}{a^2+2} & \dfrac{-a}{a^2+2} \end{pmatrix}$

Ex 2 **4 pts**

1. $A^3 + \alpha A^2 - 9A + \beta I_3 \implies \begin{cases} 27 + 9\alpha - 9(2) + \beta &= 0 \\ 18 + 3\alpha - 18 + \beta(0) &= 0 \end{cases}$
$\implies \begin{cases} 9 + 9\alpha + \beta &= 0 \\ \alpha &= 0 \end{cases}$
$\implies \begin{cases} \alpha &= 0 \\ \beta &= -9 \end{cases}$

2. $A^3 - 9A - 9I_3 = O_3 \iff \dfrac{1}{9}A^3 - A = I_3$
$\iff (\dfrac{1}{9}A^2 - I_3)A = I_3$
Donc A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{9}A^2 - I_3$

Ex 3 **4 pts**

1. (S) : $\begin{cases} a + b + c &= 4 \\ 4a - 2b + c &= -5 \\ a - b + c &= 0 \end{cases}$

2. (S) $\iff A\,X = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ - & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. $\det(A) = -6 \neq 0$ donc A est inversible.

4. $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ Donc $a = -1$, $b = 2$ et $c = 3$.

Ex 4 **8 pts**

1. (a) Pour tout entier n , on a : $U_{n+1} = AU_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix}$

   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = A^n\,U_0$.

2. (a) $\det(Q) = 50 \neq 0$ donc Q est inversible
et $Q^{-1} = \dfrac{1}{50}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 & -0,06 \\ 0,1 & 0,14 \end{pmatrix}$.
$Q^{-1}\,A\,Q = \begin{pmatrix} -0,25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D$.

   (b) $D = Q^{-1}\,A\,Q \iff Q\,D = A\,Q \iff A = Q\,D\,Q^{-1}$
On montrerait par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = Q\,D^n\,Q^{-1}$.

3. On en déduirait que , pour tout entier n : $A^n = \begin{pmatrix} 0,3 + 0,7(-0,25)^n & 0,42 - 0,42(-0,25)^n \\ 0,5 - 0,5(-0,25)^n & 0,7 + 0,3(-0,25)^n \end{pmatrix}$

   (a) Posons $\theta_n = (-0.25)^n$:
$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = A^n\,U_0 = \begin{pmatrix} 200(0,3 + 0,7\theta_n) + 500((0,42 - 0,42\theta_n) \\ 200(0,5 - 0,5\theta_n) + 500((0,7 + 0,3\theta_n) \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 270 - 70\theta_n \\ 450 + 50\theta_n \end{pmatrix}$

   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \theta_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (-0.25)^n = 0$ car $-1 < -0.25 < 1$

   D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} (j_n) = 270$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n) = 450$

   Le nombre de jeunes va se stabiliser vers 270 et celui d'adultes vers 450.

Ex 5 **2 pts**

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Exemple de calcul du cofacteur Δ_{23} : $\Delta_{23} = (-1)^5\ [(2)(1) - (1)(-1)] = -3$

Remarque : la transposée de com(A) est elle-même car cette matrice est symétrique.

Calcul du déterminant de A

- En utilisant les cofacteurs :

- par exemple à partir de la 1ère ligne : $|A| = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}\Delta_{1j} = (2)(-2) + (-1)(0) + (1)(-2) = -6$.

Matrice inverse de A

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ {}^t\mathrm{com}(A) = \frac{1}{-6}\ {}^t\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$