EXERCICE 1 **2 pts**

Soit la matrice $M_a = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. Justifier que M_a est inversible pour tout réel a.
2. Donner sa matrice inverse M_a^{-1}

EXERCICE 2 **4 pts**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

On donne : $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 27 & 18 & -9 \\ 18 & 0 & -9 \\ -9 & -9 & 0 \end{pmatrix}$

1. On admet qu'il existe des réels α et β tels que $A^3 + \alpha A^2 - 9A + \beta I_3$ soit égale à la matrice nulle. Les déterminer!
2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A^2 et I_3.

EXERCICE 3 **4 pts**

Dans le plan rapporté à un repère, on cherche à déterminer l'équation $y = ax^2 + bx + c$ de la parabole $\mathscr{P}$ passant par les points D(1;4), E(−2;−5) et F(−1;0).

1. Traduire l'appartenance de ces trois points à la parabole par un système (S).
2. Ecrire ce système sous la forme matricielle $A\,X = B$ en précisant les matrices A, X et B
3. Justifier que la matrice A est inversible.
4. En déduire la valeur des coefficients a, b et c.

EXERCICE 4 **8 pts**

On étudie l'évolution dans le temps du nombre de jeunes et d'adultes dans une population d'animaux.
Pour tout entier naturel n, on note j_n et a_n les nombres d'animaux jeunes et adultes après n années d'observation.

On admet que, pour tout entier n, on a : $\begin{cases} j_{n+1} = 0,125 j_n + 0,525 a_n \\ a_{n+1} = 0,625 j_n + 0,625 a_n \end{cases}$

On pose, pour tout entier n, $U_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$, et on donne $U_0 = \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix}$

1. **a.** Donner la matrice A telle que, pour tout entier n, on ait : $U_{n+1} = AU_n$.

   b. Donner, sans justifier, l'expression de U_n en fonction de U_0, A et n. (pour tout entier n).

2. Soit $Q = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$

   a. Justifier que Q est inversible, donner Q^{-1}, et vérifier que $Q^{-1}\,A\,Q$ est une matrice diagonale D que vous préciserez.

   b. Donner sans justifier et pour tout entier n, l'expression de A^n en fonction de Q, Q^{-1} et D^n.

3. On donne, pour tout entier n : $A^n = \begin{pmatrix} 0,3 + 0,7(-0,25)^n & 0,42 - 0,42(-0,25)^n \\ 0,5 - 0,5(-0,25)^n & 0,7 + 0,3(-0,25)^n \end{pmatrix}$

   a. En déduire les expressions de j_n et a_n en fonction de n.

   b. Déterminer les limites des suites (j_n) et (a_n).

EXERCICE 5 **2 pts**

Déterminer sans machine (méthode libre!) la matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$